

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

**Lehrstuhl für Multimediakommunikation und
Signalverarbeitung**

Prof. Dr.-Ing. habil. Rudolf Rabenstein

Forschungspraktikum

**Physikalische Modellierung der
elektromechanischen Kopplung einer
Hallspirale**

von Andreas Brendel

2015

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Ort, Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen	III
1 Einleitung	1
1.1 Zielsetzung	2
1.2 Aufbau der Arbeit	2
2 Aufbau	4
3 Herleitung der Eingangsgrößen	8
3.1 Vorbemerkungen	8
3.2 Beschreibung als magnetischer Kreis	10
3.3 Induktivität	11
3.4 Drehmoment durch Magnetfeld	12
3.5 Torsion des Drahtes	13
3.6 Trägheitsmoment	14
3.7 Bewegungsgleichung	16
3.8 Eingangsfiler	17
3.9 Zusammenfassung	21
4 Herleitung der Ausgangsgrößen	22
4.1 Bewegungsgleichung	22
4.2 Feld des Dipols	23
4.3 Fluss im Eisenkern	24

4.4	Induktion	26
4.5	Ausgangsfiter	27
4.6	Zusammenfassung	29
5	Randwerte	30
5.1	Federmodell	30
5.2	Skalierung	32
5.3	Eingang	36
5.4	Ausgang	38
5.5	Zusammenfassung	39
6	Verlustterme	40
6.1	Hinzufügen von Reibungstermen	40
6.2	Skalierung des Verlustmodells	42
6.3	Zusammenfassung	49
7	Berechnung des charakteristischen Polynoms	51
7.1	Berechnung des charakteristischen Polynoms	51
7.2	Zusammenfassung	59
8	Einfaches Federmodell ohne FTM	60
8.1	Aufstellen des Modells	60
8.2	Berechnung der Parameter	65
8.3	Zusammenfassung	66
9	Zusammenfassung und Ausblick	68
	Abbildungsverzeichnis	69
	Literaturverzeichnis	72

Formelzeichen

$h_{\text{Kern}}, l_{\text{Kern}}, t_{\text{Kern}}$	Höhe, Länge und Tiefe des Eisenkerns
\vec{A}	Flächennormalenvektor
A_L, A_{Fe}	Querschnittsfläche des Luftspalts und des Eisenkerns
\vec{B}	mag. Flussdichte
B_n, B_t	Normal- und Tangentialkomponente der mag. Flussdichte
B_L, B_{Fe}	Betrag der mag. Flussdichte im Luftspalts und im Eisenkerns
Φ	mag. Fluss
\vec{H}	mag. Feldstärke
$d\vec{s}$	differentielles Wegelement
Θ	mag. Durchflutung
\vec{J}	Stromdichte
u, i, R	el. Spannung, Strom und Widerstand
N	Windungszahl
\vec{E}	el. Feldstärke
V_m, R_m	mag. Spannung und Widerstand
R_{mFe}, R_{mL}	mag. Widerstand des Eisenkerns und des Luftspalts
μ	Permittivität
μ_r, μ_0	Permittivität im Medium und im Vakuum
l_{Fe}, l_L	Länge der Kontur um Eisenkern und im Luftspalt
L	Länge des Torsionsdrahts
$\vec{e}_r, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Einheitsvektoren
ϕ	Drehwinkel

\vec{M}_B	Drehmoment hervorgerufen durch B-Feld
\vec{M}_T	rücktreibendes Drehmoment
\vec{M}_m	Drehmoment durch mag. Dipol
\vec{M}_{Out}	Drehmoment am Ausgang der Feder
\vec{M}_J	Drehmoment durch Trägheit
\vec{m}_{mV}	Magnetisierung
τ	Schubspannung
F	Kraft
G	Torsionsmodul
r	Radius
D	Federkonstante
J_0	Trägheitsmoment
$\vec{\alpha}$	Winkelbeschleunigung
$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit
ρ	Dichte
κ	Krümmung der Feder
R	Radius der Feder
α	Scherwinkel der Feder

Kapitel 1

Einleitung

Auch mit verbundenen Augen kann ein Mensch viele charakteristische Eigenschaften des Raumes, in dem er sich befindet, erkennen. So kann der blinde Kalifornier Dan Kish ohne fremde Hilfe Fahrrad fahren und Bergwandern gehen [Dwo04]. Er nutzt dazu eine Ortungstechnik, die der der Fledermäuse ähnlich ist: Kish schnalzt mit der Zunge und wertet den zurückgeworfenen Schall aus, um etwaige Hindernisse ausmachen zu können. Dabei setzt er die Fähigkeit des Menschen, die Hall- und Echo-Informationen des reflektierten Schallsignals zu verarbeiten und Umgebungsinformationen daraus zu extrahieren, ein. Die Eigenschaften des im Signal enthaltenen Halls sind abhängig von verschiedenen Parametern des umgebenden Raums, wie beispielsweise dessen Größe, Oberflächenstruktur, Form von Gegenständen im Raum usw. So verursacht eine Kirche völlig andere Halleigenschaften als ein Wohnraum.

Ist hörbar, dass der Hall in einem Schallsignal auf nicht natürliche Weise entstanden ist oder fehlt ganz, so wird dies von unserem Gehirn als unpassende Information gewertet. In der Beschallungstechnik ist man meist gezwungen, die Mikrophone in unmittelbarer Nähe der Schallquelle zu platzieren. Daher wird von dem Mikrophon keinerlei Hall aufgenommen und der Eindruck des Raumes geht verloren. Um das aufgenommene Signal dennoch natürlich klingen zu lassen, addiert man zu dem Signal noch ein künstlich erzeugtes Hallsignal.

Manche Musikinstrumente brauchen unbedingt Hall, um ihr Klangvolumen entfalten zu

können. Prominentestes Beispiel ist die Orgel. Nachhallzeiten von bis zu ca. 4s [Sch99] sind nötig, dass eine große Orgel ihren prachtvollen Klang zur Geltung bringen kann. Bevor die digitale Signalverarbeitung Einzug in die Bühnentechnik hielt, war man auf verschiedene oftmals elektromechanische Lösungen für Effektgeräte, die Nachhall erzeugen können, angewiesen. Eine dieser elektromechanischen Lösungen ist das Federhallgerät, das in dieser Arbeit näher untersucht werden soll. Popularität erlangte der Federhall als Gitarreneffekt in den 80er Jahren. Da auch Musiker heutiger Zeit auf diesen Klassiker nicht verzichten wollen und die mechanische Realisierung umständlich und inflexibel ist, ist eine Realisierung des Effekts durch digitale Signalverarbeitung wünschenswert.

1.1 Zielsetzung

In dieser Arbeit soll ein physikalisches Modell einer Hallspirale entwickelt werden, durch das die Entwicklung einer Filterimplementierung ermöglicht werden soll. Dabei wird von einem Modell, vorgestellt von [Bil13] bzw. [Wit66], ausgegangen. Dieses Modell ist repräsentiert durch ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen. Das Modell ist nicht verlustbehaftet, soll aber im Laufe dieser Arbeit mit Verlusttermen versehen werden. Neben der Modellierung der Hallfeder sollen auch die physikalischen Zusammenhänge an den Enden der Feder mathematisch gefasst werden. Dazu sollen Übertragungsfunktionen aufgestellt werden, die das Verhalten des Geräts von Ein- bzw. Ausgangsspannung zu physikalischen Größen die die Feder beschreiben, beschreiben.

1.2 Aufbau der Arbeit

In **Kapitel 2** wird kurz der Aufbau einer Hallspirale, bestehend aus Eisenkernen, Spulen, Magneten und Hallfeder, beschrieben.

In **Kapitel 3** wird ein physikalisches Modell für die Eingangsgrößen hergeleitet. Aus diesem physikalischen Modell wird eine Bewegungsgleichung am Federeingang bestimmt.

Dies wird im Laplacebereich durch eine Übertragungsfunktion zusammengefasst. In **Kapitel 4** wird analog für die Ausgangsgrößen verfahren.

In **Kapitel 5** werden aus den Bewegungsgleichungen aus Kapitel 3 und 4 Randwertbedingungen abgeleitet, die das Verhalten der Feder an den Enden bestimmen.

Das Modell von [Bil13] ist verlustfrei, was allerdings nicht realistisch ist, denn alle physikalischen Vorgänge sind in gewissem Maße verlustbehaftet. Deshalb wird in **Kapitel 6** ein neues Modell entwickelt, das Verlustterme enthält.

In **Kapitel 7** werden Vorarbeiten vollzogen, um das Randwertproblem gemäß der Sturm-Liouville-Theorie zu lösen. Hauptbestandteil dieses Kapitels ist die Berechnung des charakteristischen Polynoms der System-beschreibenden Matrix.

Kapitel 8 beschreibt eine Lösung des Problems ausgehend von einem einfacheren Modell, basierend auf [Wit66]. Bei der Lösung des Problems wird auf die Regeln, bereitgestellt durch der Sturm Liouville Theorie verzichtet. Ziel dieses Abschnitts ist ein Algorithmus zur Berechnung des verhaltenen Signals basierend auf dem entwickelten Modell.

Kapitel 2

Aufbau

In dieser Arbeit werden Federhallgeräte untersucht. Eine allgemeine Beschreibung solcher Geräte kann in [Pra] gefunden werden. Ein Hallfedergerät besteht aus mehreren Federn, die an beiden Enden mit Permanentmagneten verbunden sind. Diese Permanentmagneten sind über einen Draht mit dem Gehäuse verbunden, siehe dazu Abbildung 2.1.

Der Draht ist durch Torsion verdrehbar, der Magnet ist also drehbar gelagert. Die Permanentmagneten umschließt jeweils ein Eisenkern in U-Form. Diese beiden Eisenkerne sind jeweils mit einer Spule umwickelt, die am Eingang vom Eingangstrom gespeist wird und am Ausgang durch Induktion einen Ausgangsstrom generiert. Der Eisenkern führt ein magnetisches Feld, hervorgerufen durch Spulen und Permanentmagnet, das über den Luftspalt zwischen den Schenkeln geschlossen wird, siehe Abb. 2.2. Abb. 2.3 zeigt die Abmessungen des Eisenkerns. In Abb. 2.4 ist der Eisenkern mit dem eingeschlossenen Permanentmagneten dargestellt. Der Permanentmagnet wird im Folgenden als magnetischer Dipol beschrieben. Abb. 2.5 zeigt die Orientierung der Vektoren im Zylinderkoordinatensystem, das im Folgenden Verwendung finden wird.

Abbildung 2.6 zeigt die wichtigsten beteiligten Größen und Systeme des Federhallgeräts: Das Federhallgerät wird mit einem Musiksignal angesteuert- Die Signalform am Eingang des Geräts ist also eine zeitabhängige Spannung. Die von einem durch die angelegte Spannung hervorgerufenen Strom durchflossene Spule erzeugt ein Ma-

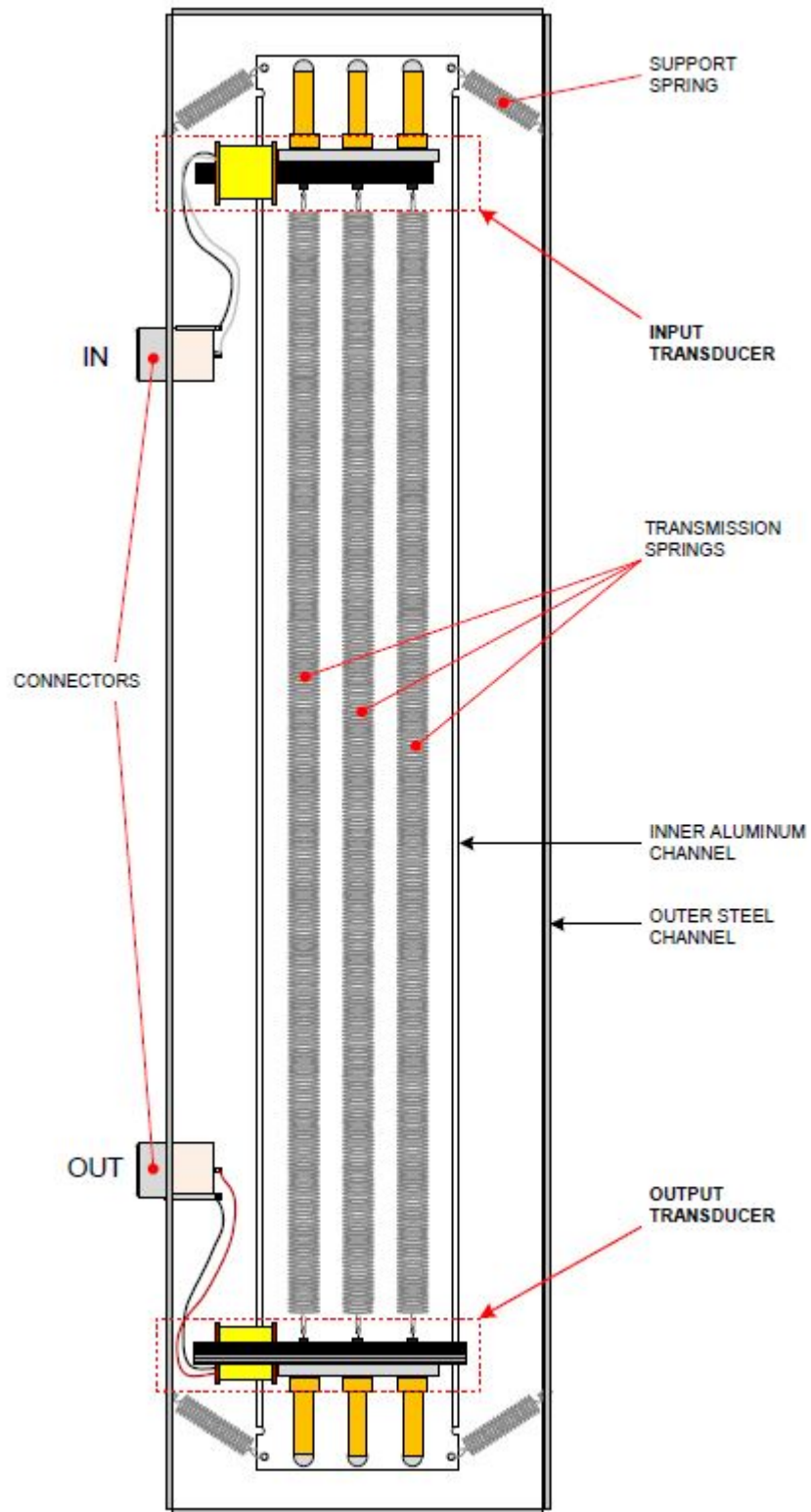


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung eines Halffedergeräts [Pra].

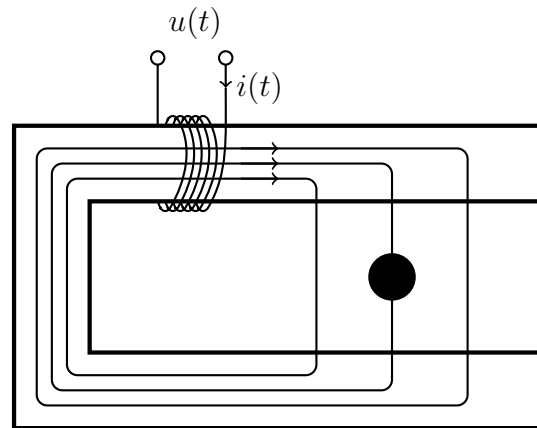


Abbildung 2.2: Dargestellt ist einer der beiden Eisenkerne mit der Spule, die das magnetische Feld mit dem Eingangs- bzw. Ausgangsstrom verknüpft.

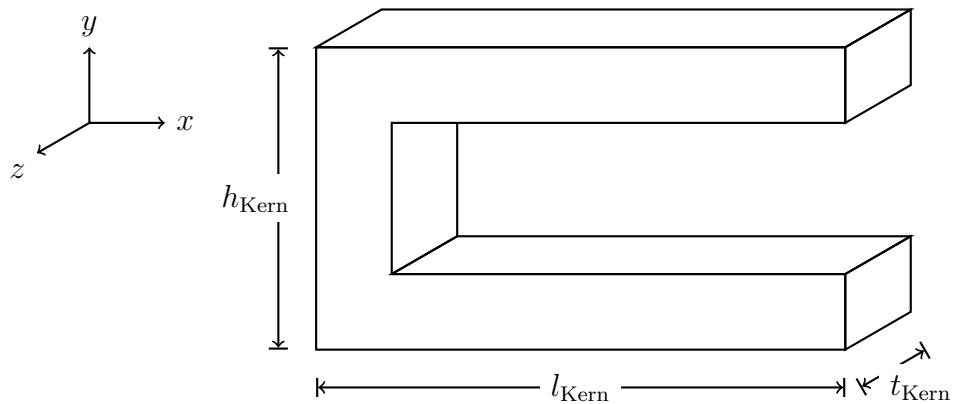


Abbildung 2.3: Abmessungen des Kerns und Orientierung des kartesischen Koordinatensystems.

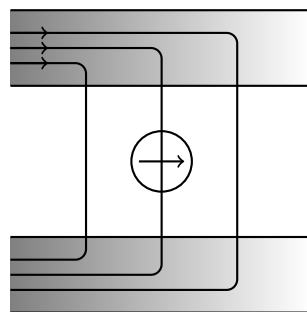


Abbildung 2.4: Darstellung des Eisenkerns und des Permanentmagneten als magnetischer Dipol.

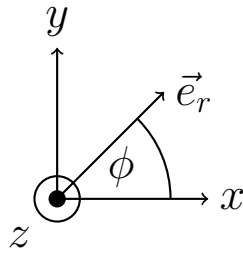


Abbildung 2.5: Zylinderkoordinaten mit gleicher Orientierung wie in Abbildung 2.3.

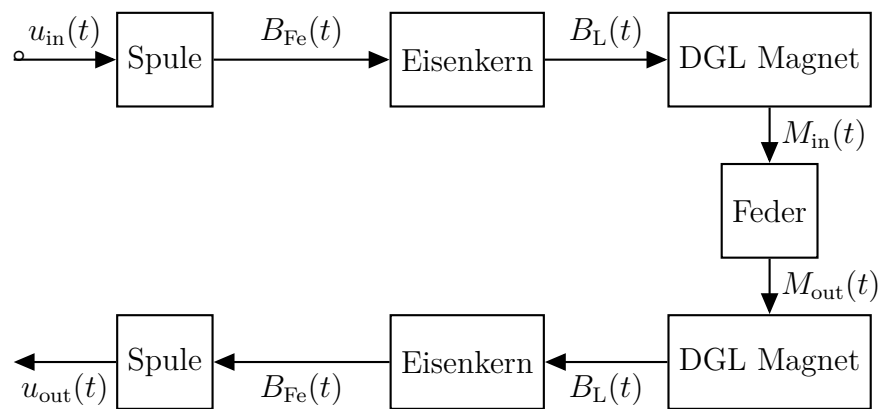


Abbildung 2.6: Blockdiagramm der beteiligten physikalischen Systeme.

gnetafeld im umschlossenen Eisenkern. Dieses Magnetfeld wird, wie in Abbildung 2.4 dargestellt, über den Luftspalt der beiden Schenkel des Eisenkerns geschlossen. Der Permanentmagnet befindet sich also in einem Magnetfeld, das aus dem des Eisenkerns durch Grenzflächenbetrachtungen hervorgeht. Vom Magnetfeld angeregt, vollzieht der Magnet eine Bewegung in Abhängigkeit von der Trägheit des Materials und der Torsion des Aufhängungsdrates. Die Rückwirkung der Feder wird hier vernachlässigt. Diese Bewegung wird durch eine Differentialgleichung beschrieben. Die Lösung dieser DGL sind Drehmoment und Drehwinkel am Federeingang. Die Beschreibung am anderen Ende der Feder erfolgt analog.

Die physikalische Beschreibung der Blöcke Spule, Eisenkern und DGL Magnet, wird in den folgenden beiden Kapiteln erfolgen. Die Beschreibung der Feder wird in den Kapiteln 7 und 8 vollzogen.

Kapitel 3

Herleitung der Eingangsgrößen

In diesem Abschnitt soll durch ein Modell des physikalischen Sachverhalts eine Bewegungsgleichung hergeleitet werden, die das Verhalten am einen Ende der Feder beschreibt. Dieses Ende der Feder wird im Folgenden als Eingang der Feder bezeichnet.

Zu Beginn sollen allgemeine Grundlagen für spätere Herleitungen gelegt werden. Durch die Beschreibung des magnetischen Kreises und der Torsion des befestigenden Drahtes wird eine Gleichung für die angreifenden Drehmomente bestimmt. Mit diesem Zusammenhang kann eine Bewegungsgleichung bestimmt werden, durch die die Bewegung am Eingang der Feder festgelegt ist.

Schließlich wird aus dieser Bewegungsgleichung eine Übertragungsgleichung im Laplacebereich hergeleitet. Diese Beschreibung als Eingangfilter lässt z.B. einfache Interpretationen des Frequenzverlaufes zu.

3.1 Vorbemerkungen

Der Fluss Φ ist mit der Flussdichte B über das Integral über die vom Feld durchdrungene Fläche \vec{A}

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (3.1)$$

verknüpft. Das Hüllflächenintegral über der magnetischen Flussdichte verschwindet

$$\oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (3.2)$$

Aus diesem Zusammenhang folgen die Knotengleichungen des magnetischen Kreises. Aus dem Durchflutungsgesetz

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (3.3)$$

können die Maschengleichungen des magnetischen Kreises abgeleitet werden. \vec{H} bezeichnet die magnetische Feldstärke, $d\vec{s}$ das differentielle Wegelement, Θ die Durchflutung und C die geschlossene Kontur entlang der integriert wird. Werden die Drähte der Spule als dünn angenommen, so darf die Stromdichte \vec{J} als homogen verteilt über dem Leiterquerschnitt angenommen werden. Damit entspricht die Stromdichte dem Strom i durch den Leiter und das Integral im Durchflutungsgesetz geht in eine Summe über

$$\Theta = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \sum_{k=1}^N i_k = Ni \quad (3.4)$$

N bezeichnet hier die Windungszahl der Spule. Die Magnetische Spannung $V_{m_{12}}$ die zwischen den Punkten P_1 und P_2 abfällt ist durch

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{H} \cdot d\vec{s} = V_{m_{12}} \quad (3.5)$$

definiert. Die magnetische Spannung über dem Eisenkern unter Annahme homogener Feldverteilung über die Querschnittsfläche des Eisenkerns ergibt sich zu

$$V_{m_{Fe}} = \int_0^{l_{Fe}} \vec{H}_{Fe} \cdot d\vec{s} = H_{Fe} l_{Fe}. \quad (3.6)$$

H_{Fe} bezeichnet die Feldstärke im Eisenkern und l_{Fe} die gemeinsame Länge der Schenkel des Eisenkerns. Die magnetische Spannung über dem Luftspalt unter Annahme homogener Feldverteilung über der Querschnittsfläche des Luftspalts ergibt sich analog zu

$$V_{m_L} = \int_0^{l_L} \vec{H}_L \cdot d\vec{s} = H_L l_L \quad (3.7)$$

mit der Feldstärke im Luftspalt \vec{H}_L und der Länge des Luftspalts l_L .

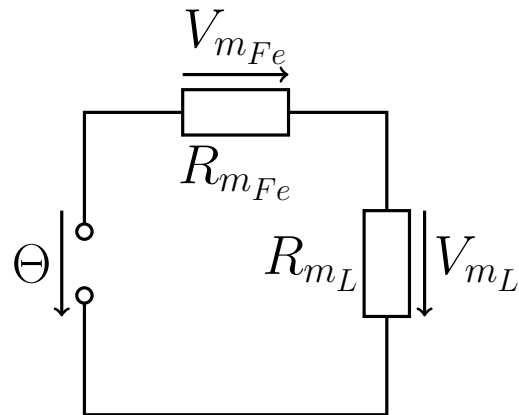


Abbildung 3.1: Beschreibung des Eisenkerns mit Luftspalt und erregender Spule als magnetischer Kreis

3.2 Beschreibung als magnetischer Kreis

In Analogie zum elektrischen Stromkreis lässt sich eine Anordnung aus magnetisch leitfähigen Materialien und magnetischen Anregungen als magnetischer Kreis beschreiben. Im Folgenden soll der Eisenkern mit Luftspalt als magnetischer Kreis betrachtet werden. Dazu werden folgende Annahmen getroffen:

- $\mu_r \gg 1 \rightarrow$ Die Flussdichte im Eisenkern ist deutlich höher als im umgebenden Raum.
- Homogene Feldverteilung über dem Querschnitt des Eisenkerns und über dem Querschnitt des Luftspalts.
- Keine Sättigung des Magnetfelds \rightarrow Lineare Hystereseurve.

Analog zum elektrischen Stromkreis kann eine Gleichung der Form des Ohmschen Gesetzes mit dem magnetischen Widerstand R_m definiert werden

$$V_m = R_m \Phi. \quad (3.8)$$

Der magnetische Widerstand lässt sich durch geometrische Größen ausdrücken

$$R_m = \frac{V_m}{\Phi} = \frac{Hl}{BA} = \frac{l}{\mu A}. \quad (3.9)$$

Für den magnetischen Widerstand des Eisenkerns und des Luftspalts folgt damit

$$R_{m_{Fe}} = \frac{l_{Fe}}{\mu_r \mu_0 A_{Fe}} \quad R_{m_L} = \frac{l_L}{\mu_0 A_L}. \quad (3.10)$$

Die Anordnung der magnetischen Widerstände und der Durchflutung durch die Spule lässt sich in einem Schaltplan veranschaulichen, siehe Abb. 3.1. Ein Maschenumlauf liefert

$$\Theta = (R_{m_{Fe}} + R_{m_L}) \Phi. \quad (3.11)$$

Aufgelöst nach dem Fluss ergibt sich damit

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_{m_{Fe}} + R_{m_L}} = \frac{Ni}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r \mu_0 A_{Fe}} + \frac{l_L}{\mu_0 A_L}}. \quad (3.12)$$

Mit Hilfe der Annahme homogener Feldverteilungen in Eisenkern und Luftspalt geht das Integral über der Flussdichte in eine Multiplikation über und es gilt

$$B_L = \frac{\Phi}{A_L} = \frac{1}{A_L} \frac{Ni}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r \mu_0 A_{Fe}} + \frac{l_L}{\mu_0 A_L}} = \frac{\mu_r \mu_0 A_{Fe} Ni}{l_{Fe} A_L + l_L \mu_r A_{Fe}}. \quad (3.13)$$

Im Folgenden wird angenommen, dass das Feld im Luftspalt entlang $-\vec{e}_y$ gerichtet ist, siehe dazu Abb. 2.3

$$\vec{B}_L = -B_L \vec{e}_y. \quad (3.14)$$

Diese Annahme ist gerechtfertigt sofern das Kernmaterial hoch permeabel ist, was zu Beginn des Abschnitts angenommen wurde.

3.3 Induktivität

Die Spule, die den Eisenkern umschließt besitzt eine Induktivität, deren Größe wichtig für die Berechnung von Strom und Spannung an der Spule ist.

Der Fluss hängt mit der Induktivität L und dem Strom i durch die Spule

$$\Phi = Li \quad (3.15)$$

zusammen. Da alle Windungen vom selben Fluss durchströmt werden, erhält man den gesamten Fluss durch die Spule, indem man den Fluss durch eine einzelne Leiterschleife mit der Windungszahl N multipliziert

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{N}{i} \frac{Ni}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r \mu_0 A_{Fe}} + \frac{l_L}{\mu_0 A_L}} = \frac{N^2}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r \mu_0 A_{Fe}} + \frac{l_L}{\mu_0 A_L}}. \quad (3.16)$$

Die Spannung u an der Spule und der Strom i durch die Spule sind durch die Spulendifferentialgleichung

$$u(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (3.17)$$

verknüpft.

3.4 Drehmoment durch Magnetfeld

Wirkt auf einen Permanentmagneten ein magnetisches Feld ein, so wirkt eine Kraft auf den Magneten, die eine Rotationsbewegung erzeugt. Das durch das Magnetfeld erzeugte Drehmoment soll nun berechnet werden.

Das Drehmoment auf einen magnetischen Dipol, hervorgerufen durch ein magnetisches Feld, ist gegeben durch [Alb12a]

$$\vec{M}_B = \vec{M}_m \times \vec{B}, \quad (3.18)$$

mit der Magnetisierung \vec{M}_m . Das Vektorprodukt kann unter Verwendung der Bilinearitätseigenschaft umgeschrieben werden

$$\vec{M}_m \times \vec{B} = (M_m \vec{e}_r) \times (B \vec{e}_y) = M_m B (\vec{e}_r \times \vec{e}_y). \quad (3.19)$$

Die Bestimmung des Vektorproduktes der korrespondierenden Einheitsvektoren wird in einer Nebenrechnung ausgeführt

$$\begin{aligned} (\vec{e}_r \times \vec{e}_y) &= (\vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi) \times \vec{e}_y = (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \cos \phi + (\vec{e}_y \times \vec{e}_y) \sin \phi \\ &= \vec{e}_z \cos \phi + 0 \cdot \sin \phi = \vec{e}_z \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Einheitsvektoren sind in Abb. 2.5 illustriert. Mit dieser Nebenrechnung ergibt sich das Drehmoment auf den magnetischen Dipol zu

$$\boxed{\vec{M}_B = \vec{e}_z M_m B \cos \phi}. \quad (3.21)$$

Das Magnetisches Dipolmoment \vec{M}_m ergibt sich aus der Magnetisierung \vec{m}_{mV} des Magnetmaterials (Materialkonstante) zu

$$\vec{M}_m = \int_V \vec{m}_{mV} dV. \quad (3.22)$$

3.5 Torsion des Drahtes

Der Draht, der für die Aufhängung des Permanentmagneten sorgt, wird bei der Rotationsbewegung des Magneten verdreht. Dazu muss ein Drehmoment aufgewendet werden, das im folgenden hergeleitet wird.

Zunächst werden aber wieder einige Vorüberlegungen angestellt: Die Schubspannung τ ist definiert als die angreifende Kraft F pro Fläche A , siehe dazu 3.2. Dieser Zusammenhang kann durch das Torsionsmodul G und den Scherwinkel α ausgedrückt werden

$$\tau = \frac{F}{A} = G\alpha. \quad (3.23)$$

Der Scherwinkel α kann durch

$$\alpha = \phi \frac{r}{L} \quad (3.24)$$

angegeben werden. L bezeichnet die Länge des Drahtstücks, ϕ den Winkel der Auslenkung des Zylinders gegenüber der Einspannung und r die Entfernung von der Symmetrieachse des als zylinderförmig angenommenen Drahtes. Am Rand des Zylinders kann für ein infinitesimales Winkelelement folgendes Kraftelement angenommen werden

$$dF \, d\phi = \tau \, dA = \tau r \, dr \, d\phi. \quad (3.25)$$

Damit ergibt sich das rücktreibende Drehmoment dM_T für ein infinitesimales Winkel-

element $d\phi$

$$dM_T d\phi = r^2 \tau dr d\phi. \quad (3.26)$$

Das Drehmoment pro Wegelement in radialer Richtung ergibt sich durch Integration über alle Winkel

$$\int_{\phi} dM_T d\phi = \int_{\phi} r^2 \tau dr d\phi = 2\pi r^2 \tau dr. \quad (3.27)$$

Das Drehmoment ergibt sich schließlich durch Integration über den Radius:

$$\begin{aligned} M_T &= \int_r dM_T = \int_0^R 2\pi r^2 \tau dr = 2\pi \int_0^R G\alpha r^2 dr = \frac{2\pi G\phi}{L} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{2\pi G\phi R^4}{L} \frac{1}{4} = \frac{\pi G R^4}{2L} \phi \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich in Form des Hookschen Gesetzes ausdrücken

$$\boxed{\vec{M}_T = -\vec{e}_z D \phi} \quad \text{mit} \quad D = \frac{\pi G R^4}{2L}. \quad (3.29)$$

D ist hierbei die Federkonstante, die durch Geometrie- und Materialkonstanten festgelegt ist.

3.6 Trägheitsmoment

Wirkt auf eine Masse eine beschleunigende Kraft, so wird die davon erzeugte Beschleunigung von der Trägheit der Masse gebremst. Im Zusammenhang mit Drehmomenten, kann dieser Effekt durch das Trägheitsmoment beschrieben werden.

Das Trägheitsmoment J_0 ist definiert als

$$\vec{M}_J = J_0 \vec{\alpha}. \quad (3.30)$$

\vec{M}_J bezeichnet das angreifende Drehmoment, J_0 das Trägheitsmoment und $\vec{\alpha}$ die Winkelbeschleunigung. Das differentielle Volumenelement eines Zylinders ist gegeben durch

$$dV = r dr d\phi dz. \quad (3.31)$$

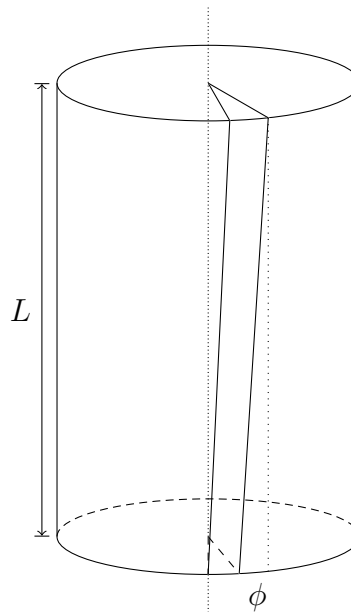


Abbildung 3.2: Der Torsionsdraht dargestellt als Zylinder. Es ist ein Zylindersegment eingezeichnet, das mit dem Scherwinkel α tordiert ist.

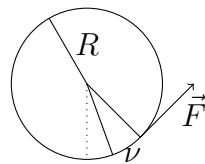


Abbildung 3.3: Der Torsionsdraht im Querschnitt. Eingezeichnet ist der Winkel ϕ der Auslenkung gegenüber der Einspannung, die angreifende Kraft F und der Radius des Drahtes R .

Nimmt man die Dichte ρ und den Abstand von der Rotationsachse r_{\perp} als konstant für das ganze Volumen des Magneten an, so gilt

$$\rho(\vec{r}) = \rho \quad r_{\perp} = R. \quad (3.32)$$

Der Trägheitsmoment kann durch Integration über das Volumen eines Rotationskörpers durch

$$J_0 = \int_V r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV \quad (3.33)$$

berechnet werden. Mit obigen Annahmen gilt dann

$$J_0 = \rho \int_V r^2 r \, dr \, d\phi \, dz = 2\pi L \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi L \rho \frac{R^4}{4}. \quad (3.34)$$

Das Trägheitsmoment ist also vollständig durch Geometrie- und Materialgrößen bestimmt.

3.7 Bewegungsgleichung

Nun sollen die bisher beschriebenen physikalischen Größen in einer die Bewegung des Permanentmagneten beschreibenden Differentialgleichung zusammengeführt werden.

Bei der Herleitung der Bewegungsgleichung wird von der Definition der Winkelbeschleunigung und des Trägheitsmomentes ausgegangen

$$\vec{\alpha} = \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \frac{\vec{M}_J}{J_0}. \quad (3.35)$$

Die Winkelbeschleunigung zeigt in Richtung der z-Achse (in Richtung des Drehmoments), siehe dazu Abb. 2.5

$$\vec{\alpha} = \vec{e}_z \alpha. \quad (3.36)$$

Setzt man das erregende Drehmoment (3.21) und das rücktreibende Drehmoment (3.29) in die Gleichung des Trägheitsmomentes (3.35) ein, so ergibt sich für die Winkelbe-

schleunigung

$$\frac{\vec{M}_B - \vec{M}_T}{J_0} = \vec{e}_z \left(\frac{M_m B \cos \phi(t)}{J_0} - \frac{D\phi(t)}{J_0} \right) = \vec{e}_z \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) = \vec{\alpha}. \quad (3.37)$$

Damit ergibt sich folgende Bewegungsgleichung

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) = \frac{M_m B}{J_0} \cos \phi(t) - \frac{D}{J_0} \phi(t)}. \quad (3.38)$$

Für sehr kleine Winkel $\phi \ll \pi$ kann diese Gleichung durch die Kleinwinkelnäherung $\cos \phi \approx 1$ vereinfacht werden.

3.8 Eingangsfilter

In diesem Abschnitt sollen die physikalischen Zusammenhänge, die in diesem Kapitel für die Eingangsgrößen mathematisch beschrieben wurden als Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich gefasst werden. Als Eingangsgröße des Systems wird die Spannung am Eingang des Federhallgeräts $u_{\text{in}}(t)$ betrachtet. Die Ausgangsgröße bildet das an die Feder angreifende Drehmoment $M_{\text{out}}(t)$.

Wir beginnen unsere Berechnung mit der Laplacetransformation der das System beschreibenden Gleichungen. Die Eingangsspannung liegt an der Spule des Federhallgeräts an, siehe dazu Abbildung 2.2. Strom und Spannung sind über die Differentialgleichung der Induktivität miteinander verknüpft. Die Laplacetransformation der korrespondierenden Integralgleichung ergibt sich

$$i(t) = \int \frac{u_{\text{in}}(t)}{L} dt \quad \circ \bullet \quad I(s) = \frac{1}{L} \frac{U_{\text{in}}(s)}{s}. \quad (3.39)$$

Der Spulenstrom erzeugt ein Magnetfeld, das durch

$$B(t) = \frac{\mu_r \mu_0 A_{\text{Fe}} N i(t)}{l_{\text{Fe}} A_L + l_L \mu_r A_{\text{Fe}}} \quad \circ \bullet \quad B(s) = \frac{\mu_r \mu_0 A_{\text{Fe}} N}{l_{\text{Fe}} A_L + l_L \mu_r A_{\text{Fe}}} I(s) \quad (3.40)$$

beschrieben werden kann. Am Federeingang gilt die Differentialgleichung (4.2)

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) = -C^2 \phi(t) + f(t) \quad (3.41)$$

mit der Konstanten

$$C^2 = \frac{D}{J_0}. \quad (3.42)$$

Die Anregungsfunktion kann durch

$$f(t) = \frac{B(t)M_m}{J_0} \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(s) = \frac{M_m}{J_0} B(s) \quad (3.43)$$

definiert werden. Einsetzen von (3.39) und (3.40) liefert

$$F(s) = \frac{M_m}{J_0} \frac{\mu_r \mu_0 A_{\text{Fe}} N}{l_{\text{Fe}} A_L + l_L \mu_r A_{\text{Fe}}} \frac{1}{L} \frac{U_{in}(s)}{s} = C_{mat} \frac{U_{in}(s)}{s}. \quad (3.44)$$

Mit $C_{mat} = \frac{M_m}{J_0} \frac{\mu_r \mu_0 A_{\text{Fe}} N}{l_{\text{Fe}} A_L + l_L \mu_r A_{\text{Fe}}} \frac{1}{L}$, eine Größe die Material- und Geometriekonstanten beschreibt. Laplacetransformation der Bewegungsgleichung (3.41) ergibt

$$\phi''(t) = -C^2 \phi(t) + f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad s^2 \Phi(s) - s\phi(0) - \phi'(0) = -C^2 \Phi(s) + F(s). \quad (3.45)$$

Aufgelöst nach $\Phi(s)$ ergibt sich

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + s\phi(0) + \phi'(0)}{s^2 + C^2} \quad (3.46)$$

Es wird angenommen, dass das System zu Beginn in Ruhe ist. Deshalb wird $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ gesetzt.

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{s^2 + C^2} \quad (3.47)$$

An die Feder greift die Differenz aus erregenden Drehmoment, hervorgerufen durch das B-Feld, und rüctreibendes Drehmoment, hervorgerufen durch die Torsion des Drahtes an

$$M_{in}(t) = M_B(t) - M_T(t) = M_m B(t) \cos(\phi(t)) + D\phi(t). \quad (3.48)$$

Mit Kleinwinkelnäherung $\cos(\phi(t)) \approx 1$ gilt

$$M_{in}(t) = M_m B(t) + D\phi(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad M_{in}(s) = M_m B(s) + D\Phi(s). \quad (3.49)$$

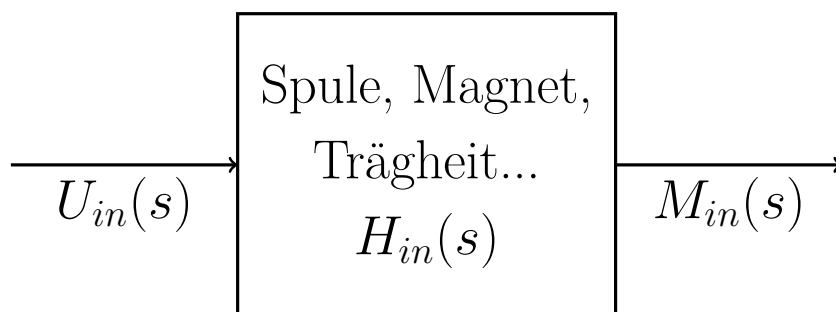


Abbildung 3.4: Beschreibung der Eingangsgrößen als Filter mit Übertragungsfunktion $H_{in}(s)$.

Einsetzen der obigen Gleichungen liefert

$$M_{in}(t) = M_m \frac{J_0}{M_m} F(s) + D \frac{F(s)}{s^2 + C^2} \quad (3.50)$$

$$= \left(J_0 + \frac{D/J_0}{s^2 + C^2} J_0 \right) F(s) \quad (3.51)$$

$$= J_0 \left(1 + \frac{C^2}{s^2 + C^2} \right) F(s) \quad (3.52)$$

$$= \left(1 + \frac{C^2}{s^2 + C^2} \right) J_0 C_{mat} \frac{U_{in}(s)}{s}. \quad (3.53)$$

$$(3.54)$$

Somit ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$H_{in}(s) = \frac{M_{in}(s)}{U_{in}(s)} = \left(1 + \frac{C^2}{s^2 + C^2} \right) \frac{J_0 C_{mat}}{s}. \quad (3.55)$$

Der Term in Klammern $\left(1 + \frac{C^2}{s^2 + C^2} \right)$ kann als direkter Pfad, überlagert mit einem Tiefpass-Shelving-Filter

$$H_{TP}(s) = \frac{C^2}{s^2 + C^2} \quad (3.56)$$

interpretiert werden. Der Tiefpass besitzt eine Eckfrequenz bei 626 Hz. Mit Hinblick auf die Verwendung des Federhallgeräts als Gitarreneffekt, dämpft der Filter nur die Töne auf den allerhöchsten Bündeln und die Obertöne. Abbildung 3.5 zeigt ein Bode Diagramm des Filters.

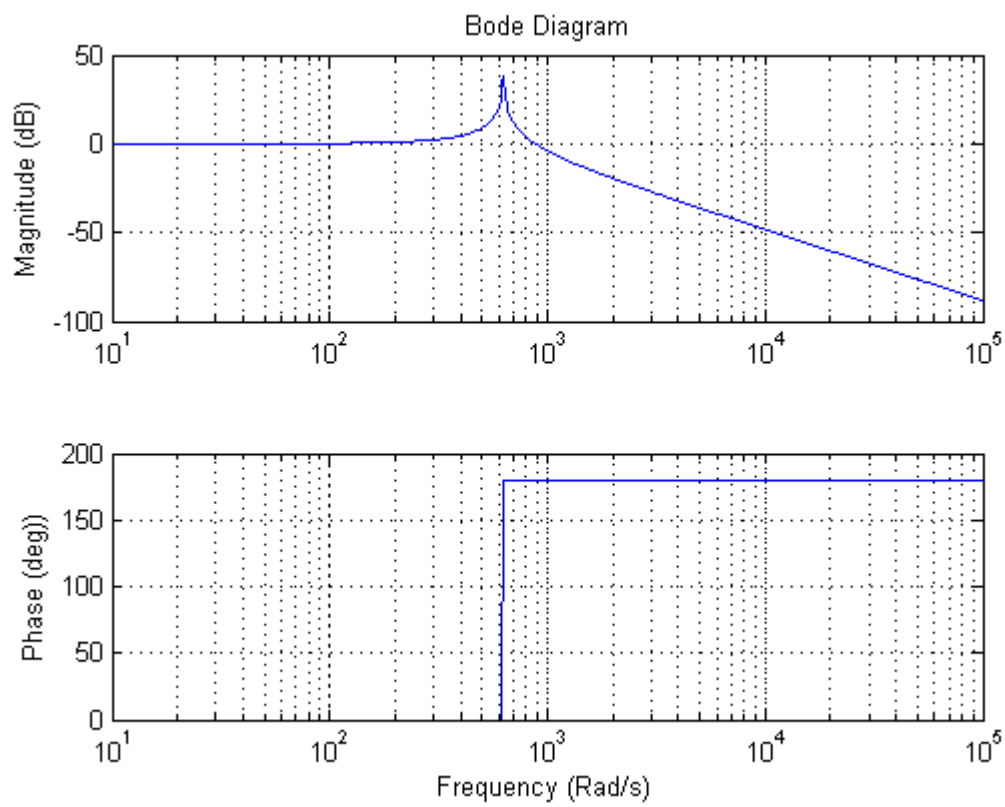


Abbildung 3.5: Bode-Diagramm des Tiefpassfilters $H_{TP}(s)$.

3.9 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde ausgehend von den zugrunde liegenden physikalischen Effekten und der Eingangsspannung u eine Bewegungsgleichung hergeleitet, die das Verhalten der Feder an der Eingangsseite beschreibt. Dazu wurden das elektromagnetische Verhalten der Spule, des Eisenkerns, des Luftspalts und des Permanentmagneten modelliert. Ausgehend davon wurde das mechanische Verhalten des Magneten und des Torsionsdrahtes an dem der Magnet gelagert ist modelliert. Abschließend wurde das physikalische Verhalten am Federeingang durch eine Übertragungsfunktion charakterisiert.

Kapitel 4

Herleitung der Ausgangsgrößen

In diesem Kapitel wird das andere Ende der Feder, im Folgenden Federausgang genannt, betrachtet, siehe dazu Abbildung 2.1. Ziel dieses Kapitel ist es, ausgehend von einer Bewegungsgleichung ähnlich derer am Federeingang am Federausgang, die auftretenden physikalischen Effekte zu modellieren. Durch die gewonnenen Modelle soll schließlich die Ausgangsspannung u des Hallgerätes angegeben werden.

Dazu wird das Feld des bewegten Permanentmagneten, der magnetische Fluss im Eisenkern und die Induktion in der den Eisenkern umschließenden Spule beschrieben. Abschließend wird das physikalische Verhalten in einer Übertragungsfunktion zusammengefasst.

4.1 Bewegungsgleichung

Analog zum Federeingang soll hier eine Bewegungsgleichung des Permanentmagneten am Federausgang aufgestellt werden. Eine Rückwirkung der Bewegung des Magneten auf die Feder wird hier vernachlässigt.

Setzt man das Drehmoment \vec{M}_{Out} das durch die Feder erzeugt wird und das rücktreibende Torsionsdrehmoment \vec{M}_{T} in die Gleichung des Trägheitsmomentes (3.35) ein, erhält

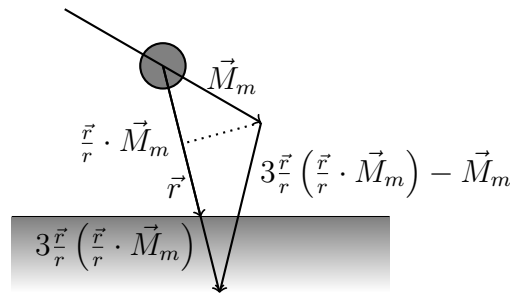


Abbildung 4.1: Der Permanentmagnet ist hier als magnetischer Dipol dargestellt. Die graue Fläche im unteren Bereich symbolisiert den Eisenkern. Außerdem sind die wichtigsten Größen aus Gleichung (4.4) eingezeichnet.

man

$$\frac{\vec{M}_{\text{Out}}(t) - \vec{M}_{\text{T}}}{J_0} = \vec{e}_z \left(\frac{M_{\text{Out}}(t)}{J_0} - \frac{D\phi(t)}{J_0} \right) = \vec{e}_z \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) = \vec{\alpha} \quad (4.1)$$

und damit folgende Bewegungsgleichung

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) = \frac{M_{\text{Out}}(t)}{J_0} - \frac{D}{J_0} \phi(t)}. \quad (4.2)$$

Das am Federausgang erzeugte erregende Drehmoment \vec{M}_{Out} ist noch durch eine geeignete Übertragungsfunktion der Feder zu bestimmen. Ist \vec{M}_{Out} bekannt, so kann die Differentialgleichung (4.2) nach dem Drehwinkel ϕ gelöst werden, der im Folgenden als bekannt vorausgesetzt wird.

4.2 Feld des Dipols

Der Permanentmagnet erzeugt ein zeitlich konstantes Magnetfeld, das durch die Drehung des Magneten zeitveränderlich wird.

Setzt man den Koordinatenursprung im Mittelpunkt des magnetischen Dipols fest, so ist dessen Dipolmoment radial nach außen gerichtet, siehe Abb. 4.1

$$\vec{M}_m = M_m \vec{e}_r = M_m (\vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi). \quad (4.3)$$

Die magnetische Flussdichte eines magnetischen Dipols ist nach [Alb12a] durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{M}_m) - \vec{M}_m r^2}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3\frac{\vec{r}}{r} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{M}_m \right) - \vec{M}_m \right] \quad (4.4)$$

gegeben. \vec{r} bezeichnet dabei den Ortsvektor des Beobachtungspunktes. Wird der Ursprung des Koordinatensystems im Mittelpunkt des Dipols gewählt und der Beobachtungspunkt auf der Oberfläche des Eisenkerns, ergibt sich

$$\vec{r} = \vec{e}_x x - \vec{e}_y \frac{l_L}{2}. \quad (4.5)$$

Die Orientierung des Koordinatensystems kann Abb. 2.3 entnommen werden. Der Betrag dieses Ortsvektors ergibt sich zu

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + \frac{l_L^2}{4}}. \quad (4.6)$$

Das Skalarprodukt aus (4.4) wird hier in einer Nebenrechnung ausgeführt

$$\vec{e}_r \cdot \vec{r} = (\vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi) \cdot \left(-\vec{e}_y \frac{l_L}{2} + \vec{e}_x x \right) = x \cos \phi - \frac{l_L}{2} \sin \phi. \quad (4.7)$$

Damit folgt für die magnetische Flussdichte des magnetischen Dipols auf der Oberfläche des Eisenkerns

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 M_m}{4\pi r^3} \left[3\frac{\vec{r}}{r^2} \left(x \cos \phi - \frac{l_L}{2} \sin \phi \right) - \vec{e}_r \right] \\ &= \frac{\mu_0 M_m}{4\pi r^3} \left[3\frac{\vec{e}_x x - \vec{e}_y \frac{l_L}{2}}{x^2 + \frac{l_L^2}{4}} \left(x \cos \phi - \frac{l_L}{2} \sin \phi \right) - \vec{e}_x \cos \phi - \vec{e}_y \sin \phi \right] \\ &= \underbrace{\vec{e}_x \cos \phi \left(\frac{3x^2}{x^2 + \frac{l_L^2}{4}} - 1 \right)}_{B_x} + \underbrace{\vec{e}_y \sin \phi \left(\frac{\frac{3}{4}l_L^2}{x^2 + \frac{l_L^2}{4}} - 1 \right)}_{B_y}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Flussdichte lässt sich in eine x- und eine y-Komponente zerlegen.

4.3 Fluss im Eisenkern

Der Magnet erzeugt ein magnetisches Feld in Luft. Das magnetische Feld im Eisenkern ist im Allgemeinen nicht gleich dem Feld in Luft. Deshalb wird im Folgenden das

Verhalten des Feldes an der Materialgrenze untersucht.

Um die magnetische Flussdichte im Eisenkern zu berechnen wird die Flussdichte auf der Oberfläche des Eisenkerns betrachtet. Die Oberfläche des Eisenkerns stellt eine Sprungstelle der Permeabilität von μ_0 in Luft zu $\mu_r\mu_0$ im Eisenkern dar. Die Flussdichte an der Oberfläche des Kerns lässt sich in eine Normal- und eine Tangentialkomponente, in Bezug auf die Orientierung der Fläche, zerlegen.

$$\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_t \quad (4.9)$$

An der Sprungstelle der Permeabilität gilt, [Alb4]:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{B_{t1}}{B_{t1}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (4.10)$$

Siehe dazu Abb. 4.2. Damit gilt also

$$\vec{B}_{t2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \vec{B}_{t1}. \quad (4.11)$$

Die Tangentialkomponente der Flussdichte ändert also sprunghaft ihren Wert, in Abhängigkeit der Permeabilitäten der beiden angrenzenden Volumen. Die Normalkomponente der Flussdichte ist stetig

$$\vec{B}_{n1} = \vec{B}_{n2}. \quad (4.12)$$

Damit lässt sich eine Beziehung zwischen den Normal- und Tangentialkomponenten der beiden Volumina aufstellen

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_{t2} + \vec{B}_{n2} = \vec{B}_{n1} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \vec{B}_{t1}. \quad (4.13)$$

Setzt man in diese Gleichung die entsprechenden Werte für den Eisenkern und den Luftspalt ein, ergibt sich

$$\vec{B}_{Fe} = \vec{B}_{nL} + \frac{\mu_r\mu_0}{\mu_0} \vec{B}_{tL} = \vec{B}_{nL} + \mu_r \vec{B}_{tL}. \quad (4.14)$$

Damit ergibt sich der Fluss in Eisenkern bzw. Luftspalt zu

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_{Fe} A_{Fe} = B_L A_L. \quad (4.15)$$

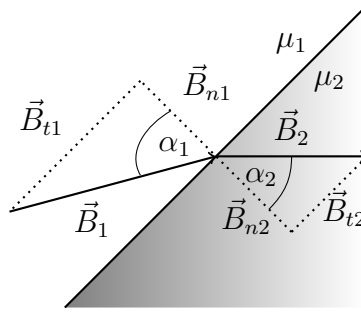


Abbildung 4.2: Dargestellt ist die Sprungstelle von μ von Luft zum Eisenkern. Außerdem sind die Normal- und Tangentialkomponenten des B-Felds im Eisenkern und im Luftspalt eingezeichnet.

Die Projektion auf Normal- und Tangentialkomponente entspricht einer Zerlegung in x- und y-Komponente der Flussdichte

$$\vec{B}_n = -\vec{B}_y \quad \vec{B}_t = \vec{B}_x. \quad (4.16)$$

Diese Zerlegung wurde bereits in (4.8) ausgeführt.

4.4 Induktion

Als Ausgangsgröße liefert das Federhallgerät eine Spannung, die die Information des verhallten Musiksignals trägt. Um diese Ausgangsspannung zu erhalten wird die in der Ausgangsspule induzierte Spannung betrachtet.

Das Induktionsgesetz kann wie folgt definiert werden, [Alb4]

$$\oint_{\partial A(t)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_{A(t)} \frac{\partial B(t)}{\partial t} \cdot d\vec{A} = - \frac{d}{dt} B(t) A. \quad (4.17)$$

Die induzierte Spannung in einer Leiterschleife kann durch

$$u(t) = Ru(t) = - \frac{d}{dt} \Phi(t) = - \frac{d}{dt} B_{Fe}(t) A_{Fe} = - \frac{d}{dt} B_L(t) A_L \quad (4.18)$$

berechnet werden. Die gesamte induzierte Spannung in der Spule ist die N-fache Spannung in einer Leiterschleife

$$u_{\text{ges}}(t) = Nu(t) = -N \frac{d}{dt} \Phi(t). \quad (4.19)$$

4.5 Ausgangsfilter

Nun sind alle physikalischen Zusammenhänge des Federendes erfasst worden. Diese sollen, analog zum Federeingang, in einer Übertragungsfunktion zusammengefasst werden.

Im Folgenden wird der Drehwinkel als gegeben angenommen, da er die Ausgangsgröße des Modells ist, das in Kapitel 8 behandelt werden wird. Eingangs- und Ausgangsgröße vertauschen ihre Rolle in der Bewegungsgleichung.

Die Ausgangsspannung des Federhallgerät ergibt sich aus der Induktion des Magnetfelds

$$u_{\text{out}}(t) = Nu_{\text{einzel}}(t) = -NA_{\text{Fe}} \frac{d}{dt} B_{\text{Fe}}(t). \quad (4.20)$$

Die Ausgangsspannung skaliert mit der Windungszahl N . Das B-Feld im Eisenkern kann, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben in x- und y-Komponente bzw. Tangential und Normalkomponente zerlegt werden

$$\vec{B}_{Fe} = -\vec{B}_y + \mu_r \vec{B}_x = -\vec{e}_y \sin \phi d_y + \mu_r \vec{e}_x \cos \phi d_x. \quad (4.21)$$

d_x und d_y fassen hierbei Material- und Geometrieconstanten zusammen. Da Feldlinien senkrecht auf hochpermeablen Körpern stehen muss nur die y-Komponente des B-Feldes weiter betrachtet werden

$$B_{Fe} = -d_y \sin \phi. \quad (4.22)$$

Damit ergibt sich die Ausgangsspannung zu

$$u_{\text{out}}(t) = -NA_{\text{Fe}} \frac{d}{dt} (-d_y \sin \phi(t)) = NA_{\text{Fe}} d_y \frac{d}{dt} \sin \phi(t) = c_B \cos(\phi(t)) \phi'(t). \quad (4.23)$$

Mit der Kleinwinkelnäherung $\cos \phi \approx 1$ folgt

$$u_{\text{out}}(t) = c_B \phi'(t). \quad (4.24)$$

Laplacetransformation liefert

$$U_{\text{out}}(s) = c_B s \Phi(s). \quad (4.25)$$

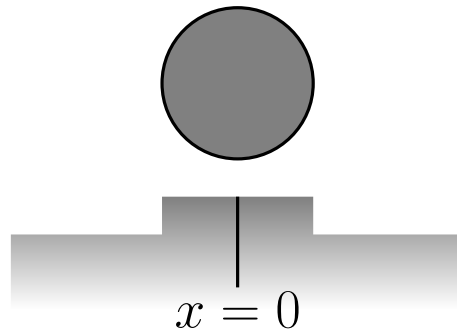


Abbildung 4.3: Dargestellt ist ein Querschnitt durch den Eisenkern und den Magneten des Federhallgeräts. Der Eisenkern besitzt eine Ausbuchtung direkt unterhalb des Magneten.

Es ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$H_{\text{out}}(s) = \frac{U_{\text{out}}(s)}{\Phi(s)} = c_B s \quad (4.26)$$

mit der Konstanten

$$c_B = N A_{\text{Fe}} d_y = N A_{\text{Fe}} \left(\frac{\frac{3}{4} l^2}{x^2 + \frac{l^2}{4}} - 1 \right). \quad (4.27)$$

Der Eisenkern besitzt direkt unterhalb des Magneten eine Ausbuchtung, die den Abstand von Magnet zu Eisenkern im Vergleich zum restlichen Teil des Schenkels des Eisenkerns deutlich verringert, siehe dazu Abbildung 4.3. Deshalb darf angenommen werden, dass das Feld unterhalb des Dipols bei $x = 0$ dominant ist. Die Übertragungsfunktion vereinfacht sich mit

$$c_B = N A_{\text{Fe}} \left(\frac{\frac{3}{4} l^2}{\frac{l^2}{4}} - 1 \right) = N A_{\text{Fe}} (3 - 1) = 2 N A_{\text{Fe}} \quad (4.28)$$

zu

$$H_{\text{out}}(s) = 2 N A_{\text{Fe}} s. \quad (4.29)$$

Durch die Übertragungsfunktion wird ein Differenzierer realisiert. Der Ausgangsfilter hat also Hochpasscharakter.

4.6 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde die Ausgangsspannung bzw. der Ausgangstrom des Federhall-Apparates in Abhängigkeit des erregenden Drehmomentes am Permanentmagneten hergeleitet. Es wurde von einer Bewegungsgleichung des Magneten ausgegangen. Im Anschluss daran wurde das Magnetfeld des als Dipol angenommenen Magneten in Abhängigkeit von dem Drehwinkel ϕ ausgedrückt und in eine zum Eisenkern tangentielle und normale Komponente aufgespalten. Diese Komponenten wurden mit den Randbedingungen an der Sprungstelle der Permittivität μ umgerechnet. Aus dem daraus resultierenden B-Feld im Eisenkern wurde mit Hilfe des Induktionsgesetzes die Ausgangsspannung bzw. der Ausgangsstrom berechnet. Abschließend wurden diese physikalischen Effekte in einer Übertragungsfunktion gefasst. Die Übertragungsfunktion des Federausgangs besitzt Hochpasscharakter.

Kapitel 5

Randwerte

In diesem Kapitel sollen, ausgehend von den durch vorige Untersuchungen aufgestellten Bewegungsgleichungen, die Randwerte am Eingang und am Ausgang der Feder aufgestellt werden. Dazu wird zu Beginn das Federmodell aus [Bil13] vorgestellt und zur besseren Handhabbarkeit auf ein dimensionsloses Modell abgebildet.

5.1 Federmodell

In diesem Kapitel soll das Federmodell von [Bil13] vorgestellt werden. Zur handlicheren Notation wird die Krümmung κ der Feder als

$$\kappa = \frac{\cos^2(\alpha)}{R} \quad (5.1)$$

definiert. [LT01] schlägt diese Gleichungen zur Beschreibung der Feder vor

$$\partial_s \xi = \kappa \mathbf{J} \xi + \mathbf{E} \theta + \frac{1}{GA\gamma} \mathbf{K} \mathbf{p} \quad (5.2)$$

$$\partial_s \phi = \kappa \mathbf{J} \phi + \frac{1}{EI} \mathbf{L} \mathbf{M} \quad (5.3)$$

$$\partial_s \mathbf{m} = \kappa \mathbf{J} \mathbf{m} + \mathbf{E} \mathbf{p} + \rho I \mathbf{M} \partial_{tt} \phi \quad (5.4)$$

$$\partial_s \mathbf{p} = \kappa \mathbf{J} \mathbf{p} + \rho A \partial_{tt} \xi \quad (5.5)$$

$$\cdot \quad (5.6)$$

Die beschreibenden Variablen des Ortes ξ , des Drehwinkels ϕ , des Drehmomentes \mathbf{m} und der Kraft \mathbf{p} sind zusammengesetzt aus je drei Beiträgen in Richtung des Federkoordinatensystems der Feder

$$\xi = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi_u \\ \phi_v \\ \phi_w \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Die beschreibenden Systemmatrizen sind gegeben als

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \tan(\alpha) & -1 \\ -\tan(\alpha) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G\gamma}{E} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{GI_\phi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_\phi}{I} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Die Gleichungen des Federmodells lassen sich kompakt in Matrixschreibweise darstellen

$$\partial_s \begin{bmatrix} \xi \\ \phi \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa\mathbf{J} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \frac{1}{GA\gamma}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \kappa\mathbf{J} & \frac{1}{EI}\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho IM\partial_{tt} & \kappa\mathbf{J} & \mathbf{E} \\ \rho A\partial_{tt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa\mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \phi \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Der Vektor der beschreibenden Variablen wird ab jetzt mit

$$\mathbf{y}(x, t) = \begin{bmatrix} \xi \\ \phi \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

bezeichnet.

5.2 Skalierung

Die Größen der Gleichungen in (5.10) sind mit physikalischen Einheiten versehen. Zur Vereinfachung der folgenden Untersuchungen soll im Folgenden eine Normierung vollzogen werden, die eine dimensionslose Repräsentation der Gleichungen (5.10) liefert. Zunächst wird eine Skalierung der Längenvariable

$$x' = \frac{x}{x_0} \quad (5.12)$$

und der Zeitvariable

$$t' = \frac{t}{t_0} \quad (5.13)$$

vorgenommen. x_0 und t_0 bezeichnen dabei die Referenzlänge bzw. die Referenzzeit, x' und t' bezeichnen die skalierte Länge bzw. die skalierte Zeit. Die Skalierung der Amplitude des Zustandsvektors $\mathbf{y}(x, t)$ kann durch eine Basistransformationsmatrix \mathbf{T} beschrieben werden, die den Zustandsvektor $\mathbf{y}(x, t)$ auf einen dimensionslosen Zustandsvektor $\mathbf{y}'(x', t')$ mit dem skalierten Ort x' und der skalierten Zeit t' abbildet. Nach der Konvention von [GRS07] wird die Inverse \mathbf{T}^{-1} zur Transformation genutzt. Damit gilt

$$\mathbf{y}'(x', t') = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{y}(x, t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{y}(x'x_0, t't_0). \quad (5.14)$$

Die zu skalierenden Größen treten auch in Ableitungen nach der Zeit und dem Ort auf. Für die skalierten Größen gilt

$$\partial_{x'}\mathbf{y}'(x', t') = \frac{\partial}{\partial x'}\mathbf{y}'(x', t') = \mathbf{T}^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{y}(x, t)\frac{dx}{dx'} \quad (5.15)$$

$$\partial_{t'}\mathbf{y}'(x', t') = \frac{\partial}{\partial t'}\mathbf{y}'(x', t') = \mathbf{T}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{y}(x, t)\frac{dt}{dt'} \quad (5.16)$$

$$\partial_{t't'}\mathbf{y}'(x', t') = \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\mathbf{y}'(x', t') = \mathbf{T}^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{y}(x, t)\frac{d^2t}{dt'^2}. \quad (5.17)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (5.12) und (5.13) können die Terme, die durch das Nachdifferenzieren entstanden sind aufgelöst werden. Damit gilt

$$\partial_{x'}\mathbf{y}'(x', t') = \mathbf{T}^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{y}(x, t)x_0 \quad (5.18)$$

$$\partial_{t't'}\mathbf{y}'(x', t') = \mathbf{T}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{y}(x, t) t_0^2 \quad (5.19)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{y}(x, t) = \mathbf{T}\mathbf{y}'(x', t') \quad (5.20)$$

$$\partial_x \mathbf{y}(x, t) = \frac{1}{x_0} \mathbf{T} \frac{\partial}{\partial x'} \mathbf{y}'(x', t') \quad (5.21)$$

$$\partial_{tt} \mathbf{y}(x, t) = \frac{1}{t_0^2} \mathbf{T} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathbf{y}'(x', t'). \quad (5.22)$$

Zur weiteren Analyse wird das Modell aus (5.10) in der Form

$$[\mathbf{A} - \partial_x \mathbf{I} + \partial_{tt} \mathbf{C}] \mathbf{y}(x, t) = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

geschrieben. Ausmultiplizieren liefert

$$\mathbf{A}\mathbf{y}(x, t) - \partial_x \mathbf{y}(x, t) + \partial_{tt} \mathbf{C}\mathbf{y}(x, t) = \mathbf{0}. \quad (5.24)$$

Mit (5.20),(5.21) und (5.22) ergibt sich

$$\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}'(x', t') - \frac{1}{x_0} \mathbf{T} \partial_{x'} \mathbf{y}'(x', t') + \frac{1}{t_0^2} \mathbf{C}\mathbf{T} \partial_{t't'} \mathbf{y}'(x', t') = \mathbf{0}. \quad (5.25)$$

Multiplikation von links mit $x_0 \mathbf{T}^{-1}$ ergibt

$$x_0 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}'(x', t') - \partial_{x'} \mathbf{y}'(x', t') + \frac{x_0}{t_0^2} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{T} \partial_{t't'} \mathbf{y}'(x', t') = \mathbf{0}. \quad (5.26)$$

Dies lässt sich kompakt mit den skalierten Matrizen \mathbf{A}' und \mathbf{C}' schreiben

$$\mathbf{A}'\mathbf{y}'(x', t') - \partial_{x'} \mathbf{y}'(x', t') + \mathbf{C}' \partial_{t't'} \mathbf{y}'(x', t') = \mathbf{0}. \quad (5.27)$$

Für die skalierten Matrizen gilt

$$\mathbf{A}' = x_0 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{T} \quad (5.28)$$

und

$$\mathbf{C}' = \frac{x_0}{t_0^2} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{T}. \quad (5.29)$$

Damit haben wir eine Berechnungsvorschrift, mit der wir die Matrizen \mathbf{A}' und \mathbf{C}' berechnen können. Die Matrizen können aus (5.10) abgelesen werden

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \kappa\mathbf{J} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \frac{1}{GA\gamma}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \kappa\mathbf{J} & \frac{1}{EI}\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa\mathbf{J} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa\mathbf{J} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho IM\partial_{tt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \rho A\partial_{tt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Eine Basistransformationsmatrix bzw. eine Skalierungsmatrix mit allgemeinen Gewichtungsfaktoren x_0, m_0, p_0 hat die Form

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} x_0\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & m_0\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & p_0\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Der Drehwinkel ϕ ist im Bogenmaß gegeben und somit dimensionslos. Deshalb muss er auch nicht skaliert werden und an der entsprechenden Stelle in der Transformationsmatrix steht eine Einheitsmatrix.

Nun sollen die skalierten Matrizen \mathbf{A}' und \mathbf{C}' berechnet werden. Wir beginnen mit \mathbf{A}' .

$$\mathbf{A}' = x_0\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \quad (5.32)$$

$$= x_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{x_0}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{m_0}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{p_0}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa\mathbf{J} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \frac{1}{GA\gamma}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \kappa\mathbf{J} & \frac{1}{EI}\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa\mathbf{J} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa\mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & m_0\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & p_0\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$= \begin{bmatrix} x_0\kappa\mathbf{J} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \frac{p_0}{GA\gamma}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & x_0\kappa\mathbf{J} & \frac{x_0m_0}{EI}\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & x_0\kappa\mathbf{J} & \frac{x_0p_0}{m_0}\mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & x_0\kappa\mathbf{J} \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Für die skalierte Matrix \mathbf{C}' ergibt sich analog

$$\mathbf{C}' = x_0 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (5.35)$$

$$= x_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{x_0} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{m_0} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{p_0} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho IM \partial_{tt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \rho AI \partial_{tt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & m_0 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & p_0 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{x_0}{m_0 t_0^2} \rho IM \partial_{tt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{x_0^2}{p_0 t_0^2} \rho AI \partial_{tt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Nun werden die Skalierungsfaktoren x_0, t_0, m_0 und p_0 derart gewählt, dass die resultierenden Terme möglichst einfache Gestalt haben. Es ergeben sich diese Elemente aus Gleichung (5.37) und Gleichung (5.34) mit einem Vorfaktor, der von den Skalierungsfaktoren abhängt

$$x_0 \kappa \mathbf{J} \quad \frac{p_0}{GA\gamma} \mathbf{K} \quad \frac{x_0 m_0}{EI} \mathbf{L} \quad \frac{x_0 p_0}{m_0} \mathbf{E} \quad \frac{x_0}{m_0 t_0^2} \rho IM \quad \frac{x_0^2}{p_0 t_0^2} \rho AI \quad (5.38)$$

Im ersten dieser Elemente tritt nur der Gewichtungsfaktor x_0 auf, es ist also zweckmäßig $x_0 = \frac{1}{\kappa}$ zu wählen, denn $\frac{1}{\kappa}$ hat die Dimension einer Länge. Damit sind wir mit dem ersten Element fertig und müssen dieses im folgenden nicht mehr weiter betrachten. Es verbleibt

$$\frac{p_0}{GA\gamma} \mathbf{K} \quad \frac{m_0}{EI\kappa} \mathbf{L} \quad \frac{p_0}{m_0 \kappa} \mathbf{E} \quad \frac{1}{m_0 t_0^2 \kappa} \rho IM \quad \frac{1}{p_0 t_0^2 \kappa^2} \rho AI. \quad (5.39)$$

Im zweiten Element tritt allein m_0 als Skalierungsfaktor auf. $EI\kappa$ hat die Dimension eines Drehmomentes, deshalb wird nun $m_0 = EI\kappa$ gewählt. Es verbleibt nun

$$\frac{p_0}{GA\gamma} \mathbf{K} \quad \frac{p_0}{EI\kappa^2} \mathbf{E} \quad \frac{1}{EI\kappa^2 t_0^2} \rho IM \quad \frac{1}{p_0 t_0^2 \kappa^2} \rho AI. \quad (5.40)$$

Das zweite Element hat nun p_0 als einzigen Skalierungsfaktor. Da $EI\kappa^2$ die Dimension

einer Kraft hat wird $p_0 = EI\kappa^2$ gewählt. Damit bleibt

$$\frac{EI\kappa^2}{GA\gamma} \mathbf{K} \quad \frac{1}{EI\kappa^2 t_0^2} \rho I \mathbf{M} \quad \frac{1}{EI\kappa^4 t_0^2} \rho A \mathbf{I}. \quad (5.41)$$

übrig. Wird letztendlich $t_0^2 = \frac{\rho A}{EI\kappa^4}$ gewählt, ergibt sich

$$\frac{EI\kappa^2}{GA\gamma} \mathbf{K} \quad \frac{I\kappa^2}{A} \mathbf{M}. \quad (5.42)$$

Dies ist möglich, da $\sqrt{\frac{\rho A}{EI\kappa^4}}$ die Dimension einer Zeit hat. Diese Terme können für Audioanwendungen vernachlässigt werden [Bil13], da $\frac{I\kappa^2}{A}$ proportional zu $\frac{r^2}{R^2}$ und somit extrem klein ist für Federn, die in Halffedergeräten Verwendung finden. Damit ergibt sich schließlich für die skalierten Matrizen

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}\partial_{tt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Die nun skalierten, dimensionslosen Größen, die das Verhalten der Feder bestimmen, können nun wieder in einer einzigen Matrix angeordnet werden

$$\partial_x \begin{bmatrix} \xi \\ \theta \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J} & \mathbf{E} \\ \mathbf{I}\partial_{tt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \theta \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

5.3 Eingang

Hier sollen nun die Randwerte der Eingangsgrößen der Feder bestimmt werden und in eine kompakte Form gebracht werden.

Die Bewegungsgleichung am Eingang der Feder, siehe Gleichung (4.2) ist gegeben durch

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) = \frac{M_B(t)}{J_0} - \frac{M_T(t)}{J_0} = \frac{M_m B}{J_0} \cos \phi(t) - \frac{D}{J_0} \phi(t). \quad (5.45)$$

Randwert	Koordinate	Eingang	Ausgang
Ort	$\gamma_u, \gamma_v, \gamma_w$	0	0
Kraft	$\gamma_u, \gamma_v, \gamma_w$	frei	frei
Drehwinkel	$\gamma_u, \gamma_v, \gamma_w$	frei	frei
Drehmoment	γ_v	M_B, M_T	noch zu bestimmen
	γ_u, γ_w	0	0

Tabelle 5.1: Randwerte

Die Laplace Transformation dieser Differentialgleichung lautet

$$\mathcal{L} \left\{ J_0 \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right\} = s^2 J_0 \Phi(s) = M_B(s) - M_T(s). \quad (5.46)$$

Umstellen der Gleichung liefert

$$s^2 J_0 \Phi(s) - M_B(s) + M_T(s) = 0. \quad (5.47)$$

Im Folgenden soll eine Matrixdarstellung der Randwerte der Form

$$\mathbf{F}_b^H \mathbf{Y}(s) = \Phi_0(s) \quad (5.48)$$

gefunden werden. Rechts des Gleichheitszeichens steht der Vektor Φ_0 , der die Anregung des Systems ausdrückt. Lediglich das Drehmoment $M_B(s)$ der vom Drehmoment hervorgerufen wird, kann als anregende Größe aufgefasst werden. Die anderen Variablen besitzen keine Anregung. Links des Gleichheitszeichens steht der Zustandsvektor $\mathbf{Y}(s)$ und die Matrix \mathbf{F}_b^H , die die Randwertbedingungen ausdrückt. Die Auslenkung der Feder wird am Rand zu Null angenommen. Der Drehwinkel und die Kraft unterliegen keinen Auflagen und sind somit an den Rändern frei. Der Drehmoment ist festgelegt durch die Bewegungsgleichung am Federeingang. Diese Beobachtungen sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt. Durch Laplace Transformation und Inspektion von Gleichung (5.47)

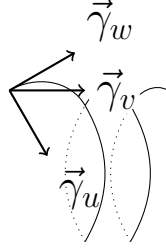


Abbildung 5.1: Koordinatensystem der Feder nach [Bil13]

ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s^2 J_0 \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi \\ \Phi \\ \mathbf{M}_T(s) \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_B(s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Die Federkoordinaten, die in [Bil13] verwendet wurden (siehe Abb. 5.1), lassen sich am Rand in Zylinderkoordinaten übersetzen

$$\vec{\gamma}_w = \vec{e}_\phi \quad \vec{\gamma}_v = \vec{e}_z \quad \vec{\gamma}_u = -\vec{e}_r. \quad (5.50)$$

Dies wird im späteren Verlauf die Berechnung möglicherweise vereinfachen.

5.4 Ausgang

Analog zum Federeingang sollen nun die Randbedingungen am Federausgang aufgeschrieben werden.

Die Bewegungsgleichung am Ausgang der Feder ist durch

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) = \frac{M_{Out}(t)}{J_0} - \frac{M_T(t)}{J_0} = \frac{M_{Out}}{J_0} - \frac{D}{J_0} \phi(t) \quad (5.51)$$

gegeben. Laplace Transformation der Gleichung liefert

$$\mathcal{L} \left\{ J_0 \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right\} = s^2 J_0 \Phi(s) = M_{Out}(s) - M_T(s). \quad (5.52)$$

Durch Inspektion von 5.52 lässt sich folgende Randwertmatrix angeben

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s^2 J_0 \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi} \\ \mathbf{\Phi} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{T}}(s) \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{Out}}(s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Die Wahl dieser Werte lässt sich analog zum eingangsseitigen Fall begründen.

5.5 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde beginnend bei einem Federmodell, vorgestellt in [Bil13] ein dimensionsloses Modell hergeleitet. Anschließend wurden die Randwerte für den Eingang und den Ausgang der Feder formuliert.

Kapitel 6

Verlustterme

Das bisher betrachtete Federmodell war völlig verlustfrei. Dies ist allerdings eine unrealistische Annahme, da alle physikalischen Vorgänge in der Natur verlustbehaftet sind. Da diese Verluste Einfluss auf den musikalischen Effekt haben, sollen in diesem Kapitel Verlustterme in das bestehende Federmodell eingefügt werden. Im Zuge dessen wird eine neue Skalierung, die die mit physikalischen Einheiten versehenen Zusammenhänge auf eine dimensionslose Darstellung abbildet, benötigt. Diese wird ebenfalls in diesem Kapitel entwickelt und auf die verlustbehafteten Gleichungen angewandt.

6.1 Hinzufügen von Reibungstermen

In diesem Abschnitt sollen Verluste, die durch Reibungseffekte entstehen in das Modell mit eingefügt werden. Die Diskussion dieses Vorgehens startet mit einer Abstrakten Analyse verlustloser und verlustbehafteter schwingungsfähiger Systeme.

Für verlustlose schwingungsfähige Systeme kann die allgemeine Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + cx = f(t) \tag{6.1}$$

angegeben werden. m bezeichnet dabei einen Vorfaktor, der die Trägheit des Systems bestimmt, z.B. die Masse eines bewegten Körpers, x die örtliche Auslenkung, c einen Proportionalitätsfaktor, z.B. eine Federkonstante, der zusammen mit der Auslenkung

x eine rücktreibende Größe bildet und $f(t)$ bezeichnet schließlich die Anregung des Systems, $m\ddot{x}$ ist die Beschleunigung des Systems. Nun sollen die Gleichungen des Drehmomentes und der Kraft aus (5.44) mit der allgemeinen Schwingungsgleichung (6.1) verglichen werden. Die Gleichung für die Kraft kann als

$$\partial_s \mathbf{p} = \kappa \mathbf{Jp} + \rho A \partial_{tt} \xi \quad (6.2)$$

angegeben werden. Umschreiben der Gleichung liefert die Form (6.1)

$$\rho A \partial_{tt} \xi = \partial_s \mathbf{p} - \kappa \mathbf{Jp} = \mathbf{f}_1(t). \quad (6.3)$$

Analog lässt sich die Gleichung für das Drehmoment aus (5.44) angeben

$$\partial_s \mathbf{m} = \kappa \mathbf{Jm} + \mathbf{Ep} + \rho IM \partial_{tt} \phi \quad (6.4)$$

und in die Form (6.1)

$$\rho IM \partial_{tt} \phi = \partial_s \mathbf{m} - \kappa \mathbf{Jm} - \mathbf{Ep} = \mathbf{f}_2(t) \quad (6.5)$$

überführen. Auch hier entfällt das rücktreibende Element. Die beiden beschriebenen Zusammenhänge für Drehmoment und Kraft liegen also in der Form (6.1) vor.

Nun soll das vorliegende Modell mit Verlusten versehen werden. Dazu betrachten wir die allgemeine verlustbehaftete Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = f(t). \quad (6.6)$$

Diese Gleichung erweitert (6.1) um einen Verlustterm, der aus der ersten Zeitableitung der Auslenkungsvariable \dot{x} und einen Dämpfungsfaktor d zusammengesetzt ist. Ein solcher Verlustterm soll nun in (6.3) und (6.5) eingefügt werden. Es ergibt sich für die Kraft

$$\rho A \partial_{tt} \xi + d \partial_t \xi = \partial_s \mathbf{p} - \kappa \mathbf{Jp} = \mathbf{f}_1(t) \quad (6.7)$$

und das Drehmoment

$$\rho IM \partial_{tt} \phi + b \partial_t \phi = \partial_s \mathbf{m} - \kappa \mathbf{Jm} - \mathbf{Ep} = \mathbf{f}_2(t) \quad (6.8)$$

mit Verlustkoeffizienten d und b .

Zur besseren Handhabung sollen diese Gleichung im Sinne einer Zustandsraumdarstellung mit Variablen versehen werden, die die zweiten Ableitungen nach der Zeit eliminieren. Wir beginnen mit der Gleichung für die Kraft und definieren einen Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v} = \dot{\xi} = \partial_t \xi. \quad (6.9)$$

Ersetzen der Zeitableitungen durch die Geschwindigkeit liefert für (6.7)

$$\rho A \dot{\mathbf{v}} + d \mathbf{v} = \mathbf{f}(t). \quad (6.10)$$

Analog dazu gehen wir nun für den Drehmoment vor. Zunächst definieren wir eine Winkelgeschwindigkeit ω als

$$\omega = \dot{\phi} = \partial_t \phi \quad (6.11)$$

und ersetzen die zeitlichen Ableitungen des Drehwinkels durch die Winkelgeschwindigkeit ω . Damit ergibt sich für (6.8)

$$\rho I M \dot{\omega} + b \omega = \mathbf{F}(t). \quad (6.12)$$

6.2 Skalierung des Verlustmodells

Im vorigen Abschnitt wurden Verlustterme in das bestehende Federmodell eingefügt und die zweiten zeitlichen Ableitungen eliminiert. Im Folgenden soll dieses neue verlustbehaftete Modell in eine dimensionslose Darstellung der Form (5.44) umgeformt werden.

Es liegen diese Gleichungen aus [Bil13], erweitert um Verlustterme vor

$$\partial_s \xi = \kappa \mathbf{J} \xi + \mathbf{E} \theta + \frac{1}{GA\gamma} \mathbf{K} \mathbf{p} \quad (6.13)$$

$$\partial_s \phi = \kappa \mathbf{J} \phi + \frac{1}{EI} \mathbf{L} \mathbf{M} \quad (6.14)$$

$$\partial_s \mathbf{m} = \kappa \mathbf{J} \mathbf{m} + \mathbf{E} \mathbf{p} + \rho I \mathbf{M} \partial_t \omega + \beta \omega \quad (6.15)$$

$$\partial_s \mathbf{p} = \kappa \mathbf{J} \mathbf{p} + \rho A \partial_t \mathbf{v} + d \mathbf{v} \quad (6.16)$$

$$\cdot \quad (6.17)$$

Außerdem bestehen folgende Zusammenhänge für die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit

$$\partial_s \mathbf{p} = \mathbf{0} = \mathbf{v} - \partial_t \xi \quad (6.18)$$

$$\partial_s \phi = \mathbf{0} = \omega - \partial_t \phi \quad (6.19)$$

$$\cdot \quad (6.20)$$

In Matrixdarstellung ergibt sich

$$\partial_s \begin{bmatrix} \xi \\ \mathbf{0} \\ \phi \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \mathbf{J} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{GA\gamma} \mathbf{K} \\ \mathbf{I} \partial_t & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa \mathbf{J} & \mathbf{0} & \frac{1}{EI} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \partial_t & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho I \mathbf{M} \partial_t + b & \kappa \mathbf{J} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \rho A \partial_t + d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \mathbf{v} \\ \phi \\ \omega \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Das soll nun in der Form (5.23)

$$[\mathbf{A} - \mathbf{B} \partial_x + \mathbf{C} \partial_t] \mathbf{y}(x, t) = 0 \quad (6.22)$$

geschrieben werden. Die Matrix \mathbf{B} hat die Form

$$\mathbf{B} = \text{diag} \{b_{11}, b_{22}, b_{33}, \dots, b_{nn}\}, \quad (6.23)$$

wobei $b_{ii} = 0$ gilt, wenn i die Stelle der Geschwindigkeitsgrößen im Vektor $\mathbf{y}(x, t)$ ist.

Die Matrix \mathbf{B} steuert also welche Größen nach dem Ort abgeleitet werden. Aufgrund der Nullen auf der Hauptdiagonalen von \mathbf{B} muss die Skalierungsvorschrift von Abschnitt 5.2 angepasst werden. Die ersten Schritte der Herleitung der Skalierungsvorschrift folgen allerdings exakt denen in 5.2 und es ergibt sich

$$\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}'(x', t') - \partial_x \mathbf{B}\mathbf{y}(x, t) + \frac{1}{t_0} \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{y}'(x', t') = 0. \quad (6.24)$$

Nun muss noch die Ortsableitung berechnet werden

$$\partial_{x'} \mathbf{B}\mathbf{y}'(x', t') = \mathbf{T}^{-1} \partial_x \mathbf{B}\mathbf{y}(x, t) x_0. \quad (6.25)$$

Umstellen der Gleichung liefert

$$\frac{1}{x_0} \mathbf{T} \partial_{x'} \mathbf{B}\mathbf{y}'(x', t') = \partial_x \mathbf{B}\mathbf{y}(x, t). \quad (6.26)$$

Da durch die Multiplikation mit \mathbf{B} Elemente in \mathbf{y} zu Null werden, genügt eine Multiplikation mit $\frac{1}{x_0}$ an den Stellen, an denen eine Ortsableitung gebildet wird. Dies kann durch Multiplikation mit der Matrix $\mathbf{E}_{x_0}^{-1}$ bewerkstelligt werden. $\mathbf{E}_{x_0}^{-1}$ hat die Form $\text{diag} \{e_{11}^{-1}, e_{22}^{-1}, e_{33}^{-1}, \dots, e_{nn}^{-1}\}$ mit $e_{ii}^{-1} = 1$ falls $b_{ii} = 0$ und $e_{ii}^{-1} = \frac{1}{x_0}$ falls $b_{ii} \neq 0$. Damit gilt

$$\mathbf{T}\mathbf{E}_{x_0}^{-1} \partial_{x'} \mathbf{B}\mathbf{y}'(x', t') = \partial_x \mathbf{y}(x, t). \quad (6.27)$$

Einsetzen in (6.24) liefert

$$\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}'(x', t') - \mathbf{T}\mathbf{E}_{x_0}^{-1} \partial_{x'} \mathbf{B}\mathbf{y}'(x', t') + \frac{1}{t_0} \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{y}'(x', t') = 0. \quad (6.28)$$

Von links mit $\mathbf{E}_{x_0} \mathbf{T}^{-1}$ multiplizieren liefert

$$\mathbf{E}_{x_0} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}'(x', t') - \partial_{x'} \mathbf{B}\mathbf{y}'(x', t') + \frac{1}{t_0} \mathbf{E}_{x_0} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{y}'(x', t') = 0. \quad (6.29)$$

Zusammenfassend lassen sich also folgende Skalierungsvorschriften festhalten

$$\boxed{\mathbf{A}' = \mathbf{E}_{x_0} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{T}} \quad \boxed{\mathbf{C}' = \frac{1}{t_0} \mathbf{E}_{x_0} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{T}} \quad (6.30)$$

Es ergibt sich

$$\mathbf{y}(x, t) = \begin{bmatrix} \xi \\ \mathbf{v} \\ \phi \\ \omega \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho I \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho I \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \kappa \mathbf{J} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{GA\gamma} \mathbf{K} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa \mathbf{J} & \mathbf{0} & \frac{1}{EI} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & b \mathbf{I} & \kappa \mathbf{J} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & d \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa \mathbf{J} \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Nun sollen diese Gleichungen analog zum obigen Vorgehen bei Bilbaos Modell in eine dimensionslose Darstellung überführt werden. Dazu wird die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

mit den Skalierungsfaktoren x_0, v_0, ω_0, m_0 und p_0 definiert. Die skalierten Matrizen \mathbf{A}' und \mathbf{C}' berechnen sich analog zu Abschnitt 5.2.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{E}_{x_0} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (6.34)$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{x_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \mathbf{J} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{GA\gamma} \mathbf{K} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa \mathbf{J} & \mathbf{0} & \frac{1}{EI} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & b\mathbf{I} & \kappa \mathbf{J} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & d\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \kappa \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 \kappa \mathbf{J} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{p_0}{GA\gamma} \mathbf{K} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & x_0 \kappa \mathbf{J} & \mathbf{0} & \frac{x_0 m_0}{EI} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{x_0 \omega_0}{m_0} b\mathbf{I} & x_0 \kappa \mathbf{J} & \frac{x_0 p_0}{m_0} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \frac{x_0 v_0}{p_0} d\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & x_0 \kappa \mathbf{J} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}' = \frac{1}{t_0} \mathbf{E}_{x_0} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T} \quad (6.35)$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{x_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\omega_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho I \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho I \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{x_0}{t_0 v_0} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{t_0 \omega_0} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{x_0 \omega_0}{t_0 m_0} \rho I \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{x_0 v_0}{t_0 p_0} \rho A \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Es verbleiben folgende Elemente von \mathbf{C}' und \mathbf{A}' , die ungleich Null sind und mit einem Vorfaktor versehen sind

$$x_0\kappa\mathbf{J} \quad \frac{p_0}{GA\gamma}\mathbf{K} \quad \frac{x_0m_0}{EI}\mathbf{L} \quad \frac{x_0\omega_0}{m_0}b\mathbf{I} \quad \frac{x_0p_0}{m_0}\mathbf{E} \quad \frac{x_0v_0}{p_0}d\mathbf{I} \quad \frac{x_0}{t_0v_0}\mathbf{I} \quad \frac{1}{t_0\omega_0}\mathbf{I} \quad \frac{x_0\omega_0}{t_0m_0}\rho I\mathbf{M} \quad \frac{x_0v_0}{t_0p_0}\rho A\mathbf{I}. \quad (6.36)$$

Analog zum Vorgehen in 5.2 werden nun sukzessive die Skalierungsfaktoren bestimmt. Fertig skalierte Größen werden in folgenden Schritten nicht weiter mit geführt. Im ersten Term kommt x_0 als einziger Skalierungsfaktor vor. $\frac{1}{\kappa}$ hat die Dimension einer Länge, es wird also $x_0 = \frac{1}{\kappa}$ gesetzt

$$\frac{p_0}{GA\gamma}\mathbf{K} \quad \frac{m_0}{EI\kappa}\mathbf{L} \quad \frac{\omega_0}{m_0\kappa}b\mathbf{I} \quad \frac{p_0}{m_0\kappa}\mathbf{E} \quad \frac{v_0}{p_0\kappa}d\mathbf{I} \quad \frac{1}{t_0v_0\kappa}\mathbf{I} \quad \frac{1}{t_0\omega_0}\mathbf{I} \quad \frac{\omega_0}{t_0m_0\kappa}\rho I\mathbf{M} \quad \frac{v_0}{t_0p_0\kappa}\rho A\mathbf{I}. \quad (6.37)$$

Im nächsten Schritt wird mit gleicher Begründung $m_0 = EI\kappa$ gesetzt

$$\frac{p_0}{GA\gamma}\mathbf{K} \quad \frac{\omega_0}{EI\kappa^2}b\mathbf{I} \quad \frac{p_0}{EI\kappa^2}\mathbf{E} \quad \frac{v_0}{p_0\kappa}d\mathbf{I} \quad \frac{1}{t_0v_0\kappa}\mathbf{I} \quad \frac{1}{t_0\omega_0}\mathbf{I} \quad \frac{\omega_0}{t_0EI\kappa^2}\rho I\mathbf{M} \quad \frac{v_0}{t_0p_0\kappa}\rho A\mathbf{I}. \quad (6.38)$$

Im nächsten Schritt wird $p_0 = EI\kappa^2$ definiert

$$\frac{EI\kappa^2}{GA\gamma}\mathbf{K} \quad \frac{\omega_0}{EI\kappa^2}b\mathbf{I} \quad \frac{v_0}{EI\kappa^3}d\mathbf{I} \quad \frac{1}{t_0v_0\kappa}\mathbf{I} \quad \frac{1}{t_0\omega_0}\mathbf{I} \quad \frac{\omega_0}{t_0EI\kappa^2}\rho I\mathbf{M} \quad \frac{v_0}{t_0EI\kappa^3}\rho A\mathbf{I}. \quad (6.39)$$

Der erste Term ist mit der Begründung aus Abschnitt 5.2 zu vernachlässigen. Nun wird $v_0 = \frac{EI\kappa^3}{d_0}$ gesetzt, denn v_0 hat die Dimension einer Geschwindigkeit.

$$\frac{\omega_0}{EI\kappa^2}b\mathbf{I} \quad \frac{d}{d_0}\mathbf{I} \quad \frac{d_0}{t_0EI\kappa^4}\mathbf{I} \quad \frac{1}{t_0\omega_0}\mathbf{I} \quad \frac{\omega_0}{t_0EI\kappa^2}\rho I\mathbf{M} \quad \frac{\rho A}{t_0d_0}\mathbf{I}. \quad (6.40)$$

Setze nun $\omega_0 = \frac{EI\kappa^2}{b_0}$. Damit ergibt sich

$$\frac{b}{b_0}\mathbf{I} \quad \frac{d_0}{t_0EI\kappa^4}\mathbf{I} \quad \frac{d}{d_0}\mathbf{I} \quad \frac{b_0}{t_0EI\kappa^2}\mathbf{I} \quad \frac{\rho I}{t_0b_0}\mathbf{M} \quad \frac{\rho A}{t_0d_0}\mathbf{I}. \quad (6.41)$$

Setzte nun schließlich $t_0 = \frac{d_0}{EI\kappa^4}$. Damit gilt

$$\frac{b}{b_0}\mathbf{I} \quad \frac{d}{d_0}\mathbf{I} \quad \frac{b_0\kappa^2}{d_0}\mathbf{I} \quad \frac{\rho EI^2\kappa^4}{d_0b_0}\mathbf{M} \quad \frac{\rho AEI\kappa^4}{d_0^2}\mathbf{I} \quad (6.42)$$

mit $\kappa = \frac{\cos^2(\alpha)}{R}$.

An dieser Stelle bleiben die Einheiten der Dämpfungsfaktoren d und b zu klären. Nach dem zugrunde liegenden Modell muss für d und b

$$\partial_s m = b\omega \quad \partial_s p = dv \quad (6.43)$$

gelten. Aus der Multiplikation der Dämpfungsfaktoren mit den Geschwindigkeitsgrößen muss also eine Kraft bzw. ein Drehmoment resultieren. Somit gilt

$$[b] = [Ns] \quad [d] = \left[\frac{Ns}{m^2} \right]. \quad (6.44)$$

Werden Skalierungsfaktoren b_0 und d_0 in entsprechenden Dimensionen gewählt, ist $\frac{b}{b_0}$ und $\frac{d}{d_0}$ dimensionslos.

Die verbleibenden Elemente sind ebenfalls dimensionslos. Nun werden zur einfacheren Notation Platzhalter g_i für diese verbleibenden Elemente eingeführt

$$g_1 = \frac{b\kappa^2}{d_0} \quad g_2 = \frac{\rho EI^2 \kappa^4}{d_0 b_0} \quad g_3 = \frac{\rho AEI \kappa^4}{d_0^2}. \quad (6.45)$$

Damit ergibt sich schließlich für die skalierten Matrizen \mathbf{A}' und \mathbf{C}'

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & b'\mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & d'\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & g_1\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & g_2\mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g_3\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

6.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde, ausgehend von einem Federmodell ohne Verluste ein verlustbehaftetes Modell hergeleitet. Durch allgemeine Überlegungen zur Form verlustloser und verlustbehafteter Schwingungen wurde die Form des in Kraft und Drehmoment verlustbehafteten Modells abgeleitet. Im Zuge dessen wurde eine Zustandsraumdarstellung des Modells angegeben und aus den Differentialgleichungen zweiter Ordnung in

der Zeit ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit gebildet. Dieses neue Modell, in das nur noch erste Ableitungen nach der Zeit eingehen, wurde in eine dimensionslose Darstellung überführt. Dazu wurde eine neue Skalierungsvorschrift entwickelt.

Kapitel 7

Berechnung des charakteristischen Polynoms

In diesem Kapitel sollen, ausgehend von den skalierten Matrizen \mathbf{A}' und \mathbf{C}' der Darstellung aus Gleichung (5.23), die Eigenwerte einer Matrix \mathbf{Q} berechnet werden, die im Zusammenhang des zugrunde liegenden Sturm-Liouville-Problems als Matrix Exponent auftritt. Für die theoretischen Grundlagen dieses Kapitels sei auf [Sch15] verwiesen.

7.1 Berechnung des charakteristischen Polynoms

Zu Beginn wird die Matrix \mathbf{Q} berechnet

$$\mathbf{Q} = \beta\mathbf{C}' - \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} & \mathbf{0} & -\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \beta\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{J} & \mathbf{0} & -\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta g_1 \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta g_2 \mathbf{M} - b' \mathbf{I} & -\mathbf{J} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{0} & (\beta g_3 - d') \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{J} \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Zur leichteren Notation wird eine Matrix \mathbf{R} eingeführt

$$\mathbf{R} = \lambda\mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I} + \mathbf{J} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\beta\mathbf{I} & \lambda\mathbf{I} - \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I} + \mathbf{J} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\beta g_1\mathbf{I} & \lambda\mathbf{I} - \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & b'\mathbf{I} - \beta g_2\mathbf{M} & \lambda\mathbf{I} + \mathbf{J} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & (d' - \beta g_3)\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I} + \mathbf{J} \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Wird $\mathbf{D} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{J}$ gesetzt und \mathbf{R} partitioniert, ergibt sich

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\beta\mathbf{I} & (\lambda - 1)\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\beta g_1\mathbf{I} & (\lambda - 1)\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & b'\mathbf{I} - \beta g_2\mathbf{M} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & (d' - \beta g_3)\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Nun soll das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{R}) \quad (7.4)$$

berechnet werden. Mit [Har08, S.91, Theorem 13.3.8] gilt

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{R}_{11}) \det(\mathbf{R}_{22} - \mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{11}^{-1}\mathbf{R}_{12}). \quad (7.5)$$

Zunächst wird die Determinante von \mathbf{R}_{11} bestimmt. Es gilt mit [Har08]

$$\det(\mathbf{R}_{11}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\beta\mathbf{I} & (\lambda - 1)\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ -\beta\mathbf{I} & (\lambda - 1)\mathbf{I} \end{bmatrix} \det(\mathbf{D}) \quad (7.6)$$

$$= \det(\mathbf{D})^2 \det((\lambda - 1)\mathbf{I}) \quad (7.7)$$

Es gilt $\det(D)^2 = (\lambda^2 + 1)^2 \lambda^2$ und $\det((\lambda - 1)\mathbf{I}) = (\lambda - 1)^3$ und somit folgt

$$\det(\mathbf{R}_{11}) = (\lambda^2 + 1)^2 \lambda^2 (\lambda - 1)^3. \quad (7.8)$$

Nun wird die Inverse von \mathbf{R}_{11} berechnet. Mit [Har08] gilt

$$\mathbf{R}_{11}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\beta\mathbf{I} & (\lambda - 1)\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{S}_{11}^{-1} & -\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} \end{array} \right] \quad (7.9)$$

Hierfür werden die Inversen von \mathbf{S}_{11} und \mathbf{S}_{22} benötigt. Gilt $\lambda \neq 1$ so ist \mathbf{S}_{11} invertierbar mit

$$\mathbf{S}_{11}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ -\beta\mathbf{I} & (\lambda - 1)\mathbf{I} \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \frac{\beta}{\lambda - 1}\mathbf{D}^{-1} & \frac{1}{\lambda - 1}\mathbf{I} \end{array} \right]. \quad (7.10)$$

Für die Inverse von \mathbf{S}_{22} gilt

$$\mathbf{S}_{22}^{-1} = \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 + 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Nun folgt noch die Berechnung von

$$-\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1} = - \left[\begin{array}{cc} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \frac{\beta}{\lambda - 1}\mathbf{D}^{-1} & \frac{1}{\lambda - 1}\mathbf{I} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \mathbf{D}^{-1} = \left[\begin{array}{c} -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1} \\ -\frac{\beta}{\lambda - 1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1} \end{array} \right]. \quad (7.12)$$

Damit ergibt sich für die Inverse von \mathbf{R}_{11}

$$\mathbf{R}_{11}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} & -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1} \\ \frac{\beta}{\lambda - 1}\mathbf{D}^{-1} & \frac{1}{\lambda - 1}\mathbf{I} & -\frac{\beta}{\lambda - 1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \end{array} \right] \quad (7.13)$$

Das Produkt in (7.5) ergibt sich zu

$$\mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{11}^{-1}\mathbf{R}_{12} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & -g_1\beta\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{(d' - \beta g_3)\beta}{\lambda - 1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} & \mathbf{0} \end{array} \right]. \quad (7.14)$$

Die Differenz in (7.5) ergibt damit

$$\mathbf{R}_{22} - \mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{11}^{-1}\mathbf{R}_{12} = \left[\begin{array}{cc|c} (\lambda - 1)\mathbf{I} & g_1\beta\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ b'\mathbf{I} - g_2\beta\mathbf{M} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & -\frac{(\beta g_3 - d')\beta}{\lambda - 1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} & \mathbf{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{array} \right] \quad (7.15)$$

Nun muss die Determinante der partitionierten Matrix \mathbf{G} berechnet werden. Für die Determinante gilt

$$\det(\mathbf{G}) = \det(\mathbf{G}_{22}) \det(\mathbf{G}_{11} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{G}_{21}). \quad (7.16)$$

Es gilt

$$\det(\mathbf{G}_{22}) = \det(\mathbf{D}) = \lambda(\lambda^2 + 1) \quad (7.17)$$

und

$$\mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{G}_{21} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{(d' - \beta g_3)\beta}{\lambda - 1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} \end{array} \right] \quad (7.18)$$

Schließlich ergibt sich für

$$\mathbf{G}_{11} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{22}^{-1}\mathbf{G}_{21} = \left[\begin{array}{cc} (\lambda - 1)\mathbf{I} & g_1\beta\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} \\ b'\mathbf{I} - g_2\beta\mathbf{M} & \mathbf{D} - \frac{(d' - \beta g_3)\beta}{\lambda - 1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} \end{array} \right] = \mathbf{H} \quad (7.19)$$

Nun muss die Determinante von \mathbf{H} berechnet werden. Es gilt

$$\det(\mathbf{H}) = \det(\mathbf{H}_{11}) \det(\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12}). \quad (7.20)$$

Es gilt

$$\det(\mathbf{H}_{11}) = (\lambda - 1)^3 \quad \mathbf{H}_{11}^{-1} = \frac{1}{\lambda - 1}\mathbf{I}, \quad (7.21)$$

$$\mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12} = \frac{g_1\beta}{\lambda - 1}\mathbf{M}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} \quad (7.22)$$

und

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12} = \mathbf{D} - \frac{(d' - \beta g_3)\beta}{\lambda - 1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} - \frac{g_1\beta}{\lambda - 1}\mathbf{M}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}. \quad (7.23)$$

Hierbei wurde

$$\mathbf{M}' = b'\mathbf{I} - g_2\beta\mathbf{M} = \begin{bmatrix} b' - g_2\beta & 0 & 0 \\ 0 & b' - g_2\beta & 0 \\ 0 & 0 & b' - 2g_2\beta \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

verwendet.

Zusammen mit den bisherigen Zwischenergebnissen ergibt sich damit

$$\det(\mathbf{R}) = \det(\mathbf{R}_{11}) \det(\mathbf{G}_{22}) \det(\mathbf{H}_{11}) \det(\mathbf{K}) = \lambda^3(\lambda^2 + 1)^3(\lambda - 1)^6 \det(\mathbf{K}) \quad (7.25)$$

Es bleibt noch die Berechnung von $\det(\mathbf{K})$. Dazu werden um Folgenden noch einige Zwischenschritte angegeben. Es gilt

$$\mathbf{DL}^{-1} = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & \lambda g_5 \\ 0 & \lambda^2 + 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda^2 g_5 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

mit $g_5 = \frac{EI}{GI_\phi}$.

$$\mathbf{ED}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{ED}^{-1}\mathbf{L} = \frac{1}{\lambda^2(\lambda^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} -\lambda(\lambda^2 + 1) & 0 & -g_5(\lambda^2 + 1) \\ 0 & \lambda(-\lambda^2 + 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

und

$$\mathbf{M}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L} = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 1)} \begin{bmatrix} (b' - g_2\beta)\lambda^2 & 0 & (b' - g_2\beta)\lambda g_5 \\ 0 & (b' - g_2\beta)\lambda^2 + 1 & 0 \\ -(b' - 2g_2\beta)g_6\lambda & 0 & (b' - 2g_2\beta)\lambda^2 g_5 g_6 \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

mit $g_6 = \frac{I_\phi}{I}$. Schließlich ergibt sich für \mathbf{K} mit den Abkürzungen $f_1 = (d' - bg_3)\beta$,

$$f_2 = g_1\beta(b' - g_2\beta), f_3 = g_1\beta(2g_2\beta - b'), f_4 = g_5g_1\beta(b' - 2g_2\beta) \quad a_1 = \lambda^2 + 1 \text{ und } a_2 = \lambda - 1$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\lambda^2 a_1^2 a_2} \mathbf{P} \quad (7.29)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 a_1^2 a_2} \begin{bmatrix} \lambda^3 a_1^2 a_2 + f_1 \lambda a_1 - f_2 \lambda^3 a_1 & 0 & f_1 g_5 a_1 - \lambda^2 a_1^2 a_2 - f_2 g_5 \lambda^2 a_1 \\ 0 & \lambda^3 a_1^2 a_2 - f_1 (1 - \lambda^2) \lambda - f_2 \lambda a_1^2 & 0 \\ \lambda^2 a_1^2 a_2 - f_3 \lambda^2 a_1 & 0 & \lambda^3 a_1^2 a_2 - f_4 \lambda^3 a_1 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 a_1^2 a_2} \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & p_{13} \\ 0 & p_{22} & 0 \\ p_{31} & 0 & p_{33} \end{bmatrix}. \quad (7.31)$$

Nach der Regel von Sarrus ist die Determinante von \mathbf{P} damit gegeben durch

$$\det(\mathbf{P}) = p_{22}(p_{11}p_{33} - p_{12}p_{21}). \quad (7.32)$$

Damit ergibt sich $\det(\mathbf{K})$ zu

$$\det(\mathbf{K}) = \left(\frac{1}{\lambda^2 a_1^2 a_2} \right)^3 p_{22}(p_{11}p_{33} - p_{12}p_{21}) \quad (7.33)$$

Nach einigem algebraischem Aufwand ergibt sich die Determinante von \mathbf{R} zu

$$\det(\mathbf{R}) = \lambda^3 a_1^3 a_2^6 \det(\mathbf{K}) \quad (7.34)$$

$$= \frac{(\lambda - 1)^3}{(\lambda^2 + 1)^3} (\lambda^7 - \lambda^6 + 2\lambda^5 - c_1\lambda^4 + \lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_3) \cdot (\lambda^{14} - 2\lambda^{13} + 6\lambda^{12} - c_4\lambda^{11} + c_5\lambda^{10} + c_6\lambda^9 - c_7\lambda^8 + c_8\lambda^7 + c_9\lambda^6 + c_{10}\lambda^5 + c_{11}\lambda^4 + c_{12}\lambda^3 + c_{13}\lambda^2 - c_{14}\lambda + c_{15}). \quad (7.35)$$

Die Polynomkoeffizienten c_i lauten

$$c_1 = f_2 + 2 \quad (7.36)$$

$$c_2 = f_1 - 2f_2 - 1 \quad (7.37)$$

$$c_3 = f_1 + f_2 \quad (7.38)$$

$$c_4 = 10 + f_2 + f_4 \quad (7.39)$$

$$c_5 = 15 + f_2 + f_4 \quad (7.40)$$

$$c_6 = f_1 + (g_5 - 3)f_2 - f_3 - 3f_4 - 20 \quad (7.41)$$

$$c_7 = f_1 + (g_5 - 3)f_2 - f_3 - 3f_4 - 20 - f_2f_4 \quad (7.42)$$

$$c_8 = (3 - g_5)f_1 + (3g_5 - 3)f_2 - 3f_3 - 3f_4 - 20 \quad (7.43)$$

$$c_9 = 15 + g_5f_1 + 3f_3 - 3g_5f_2 - f_2f_3g_5 + f_1f_4 \quad (7.44)$$

$$c_{10} = (3 - 3g_5)f_1 - 10 - 3f_3 + (3g_5 - 1)f_2 - f_4 \quad (7.45)$$

$$c_{11} = 6 + (3g_5 - 3)f_1 + 3f_3 + (1 - 3g_5)f_2 + f_4 - 2g_5f_2f_3 + g_5f_1f_3 - 2f_1f_4 + f_2f_4 \quad (7.46)$$

$$c_{12} = (1 - 3g_5)f_1 + g_5f_2 - f_3 - 2 \quad (7.47)$$

$$c_{13} = 1 + (3g_5 - 1)f_1 - g_5f_2 + f_3 - g_5f_2f_3 + 2g_5f_1f_3 - f_1f_4 \quad (7.48)$$

$$c_{14} = f_1g_5 \quad (7.49)$$

$$c_{15} = g_5f_1 + g_5f_1f_3. \quad (7.50)$$

Für die Platzhalter f_i gilt

$$f_1 = (d' - \beta g_3)\beta \quad (7.51)$$

$$f_2 = (b' - g_2\beta)g_1\beta \quad (7.52)$$

$$f_3 = (2g_2\beta - b')g_1\beta \quad (7.53)$$

$$f_4 = (b' - 2g_2\beta)g_1g_5\beta \quad (7.54)$$

$$(7.55)$$

Symbol	Name	Einheit	typischer Wert
R	Coil Radius	m	$4 \cdot 10^{-3}$
r	Wire Diameter	m	$0,2 \cdot 10^{-3}$
l	Unwound Spring Length	m	5
E	Youngs Modulus	$\frac{kN}{mm^2}$	200
ν	Poisson Ratio	-	0,3
α	Pitch Angle	-	$1,7^\circ$
ρ	Material Density	$\frac{kg}{m^3}$	7850
G	Shear Modulus	-	$\frac{E}{2(1+\nu)}$
γ	Shear Area Correction	-	0,88
I	Transverse Moment of Inertia	m^4	$\frac{\pi r^4}{4}$
I_ϕ	Polar Moment of Inertia	m^4	$\frac{\pi r^4}{2} = 2I$

Tabelle 7.1: Auftretende Größen, deren Einheiten und Größenordnungen.

mit den Platzhaltern g_i

$$g_1 = \frac{b\kappa^2}{d_0} \quad (7.56)$$

$$g_2 = \frac{\rho I^2 E \kappa^4}{d_0 b_0} \quad (7.57)$$

$$g_3 = \frac{\rho A E I \kappa^4}{d_0^2} \quad (7.58)$$

$$g_5 = \frac{EI}{GI_\phi} = 1 + \nu \quad (7.59)$$

$$g_6 = \frac{I_\phi}{I} = 2. \quad (7.60)$$

Tabelle 7.1 enthält die in den Polynomkoeffizienten auftretenden Größen, deren Einheit und Größenordnung.

Tabelle 7.1 enthält eine Zusammenstellung der auftretenden physikalischen Größen.

7.2 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das charakteristische Polynom der Matrix Q aufgestellt. Die Polynomkoeffizienten wurden durch Abkürzungen möglichst kompakt dargestellt. Es wird angenommen, dass eine analytische Berechnung der Eigenwerte nicht mit vertretbarem mathematischen Aufwand möglich ist.

Kapitel 8

Einfaches Federmodell ohne FTM

In diesem Kapitel soll ein einfaches Federmodell basierend auf [Wit66] ohne Hilfe der Functional Transformation Method (FTM) entwickelt werden. Dazu werden zunächst die physikalischen Zusammenhänge mathematisch gefasst und ein Algorithmus beschrieben, der die Verarbeitung des Signals durch das Federmodell beschreibt. Im darauf folgenden Abschnitt werden die für das Modell benötigten Parameter aus Materialgrößen basierend auf [Sch15] berechnet.

8.1 Aufstellen des Modells

Zunächst werden dazu einige Formeln zusammengestellt, die in der folgenden Herleitung benötigt werden.

Drehmoment M_T und Biegemoment M_1 sind über eine Drehmatrix mit der Kraft T und dem Torsionsmoment M_a verknüpft

$$\begin{bmatrix} M_T \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TR \\ M_a \end{bmatrix}. \quad (8.1)$$

α ist der Winkel der Federhelix. Mit den Verschiebungen d und d' eines Drahtsegments, lassen sich zwei ungekoppelte Wellengleichungen angeben

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial^2 d'}{\partial t^2} = V'^2 \frac{\partial^2 d'}{\partial x^2}. \quad (8.3)$$

d und d' gehen durch Rotation aus der axialen Verschiebung δ und der Verdrehung ψ eines Drahtstücks hervor

$$\begin{bmatrix} d \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ R\psi \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

Analog lassen sich Wellengleichungen für Dreh- und Biegemoment angeben

$$\frac{\partial^2 M_T}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial t^2} = V'^2 \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}. \quad (8.6)$$

Der Zusammenhang der Verschiebungen mit Dreh- und Biegemoment lässt sich als

$$M_T = \frac{\beta_T}{R} \frac{\partial d}{\partial x} \quad (8.7)$$

$$M_1 = \frac{\beta_1}{R} \frac{\partial d'}{\partial x} \quad (8.8)$$

angeben. Daraus ergibt sich für die Verschiebungen

$$\frac{\partial d}{\partial t} = -V \frac{\partial d}{\partial x} \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial d'}{\partial t} = -V' \frac{\partial d'}{\partial x}. \quad (8.10)$$

Schließlich folgt mit der Abkürzung $d_t = \frac{\partial d}{\partial t}$

$$d_t = -V \frac{R}{\beta_T} M_T \quad (8.11)$$

$$d'_t = -V' \frac{R}{\beta_1} M_1. \quad (8.12)$$

Die Verschiebungen ergeben sich durch Integration

$$d(x, t) = -V \frac{R}{\beta_T} \int_{t_0}^{t'} M_T(x, t') dt' \quad (8.13)$$

$$d'(x, t) = -V' \frac{R}{\beta_1} \int_{t_0}^{t'} M_1(x, t') dt'. \quad (8.14)$$

Als Randbedingung wird angenommen, dass keine Kraft an Federeingang und -ausgang angreift

$$T(0, t) = T(L, t) = 0. \quad (8.15)$$

Am Federeingang wird ein anregendes Drehmoment angenommen

$$M_a(0, t) = M_{a0}(t). \quad (8.16)$$

Die Feder sei frei am Federausgang

$$M_a(L, t) = 0. \quad (8.17)$$

Damit ergibt sich für Dreh- und Biegemoment am Federeingang

$$M_T(0, t) = \sin \alpha M_{a0}(t) \quad (8.18)$$

$$M_1(0, t) = \cos \alpha M_{a0}(t) \quad (8.19)$$

und am Federausgang

$$M_T(L, t) = 0 \quad (8.20)$$

$$M_1(L, t) = 0. \quad (8.21)$$

Die Verschiebungen am Federeingang lassen sich angeben als

$$d(0, t) = -V \frac{R}{\beta_T} \int_{t_0}^{t'} M_T(0, t') dt' = -V \frac{R}{\beta_T} \sin \alpha \int_{t_0}^{t'} M_{a0}(t') dt' \quad (8.22)$$

$$d'(0, t) = -V' \frac{R}{\beta_1} \int_{t_0}^{t'} M_1(0, t') dt' = -V' \frac{R}{\beta_1} \cos \alpha \int_{t_0}^{t'} M_{a0}(t') dt'. \quad (8.23)$$

Die Auslenkung $d(x, t)$ ist Lösung der Differentialgleichung (8.9). Umstellen ergibt

$$\left(\partial_{tt} - V^2 \partial_{xx} \right) d(x, t) = (\partial_t - V \partial_x) (\partial_t + V \partial_x) d(x, t) = 0 \quad (8.24)$$

Zu dieser DGL kann die d'Alembert Lösung angegeben werden

$$d(x, t) = d_0(x \pm Vt). \quad (8.25)$$

Die Lösung ist also eine nach rechts und eine nach links laufende Welle. Analog gilt

$$d'(x, t) = d'_0(x \pm V't). \quad (8.26)$$

Damit können die Verschiebungen am Federausgang angegeben werden

$$d(L, t) = d(L, t - 2T) + d(0, t - T) \quad (8.27)$$

$$d'(L, t) = d'(L, t - 2T') + d'(0, t - T'). \quad (8.28)$$

Eine reale Feder ist nicht verlustfrei, deshalb wird nun ein Dämpfungsfaktor γ eingeführt

$$d(L, t) = \gamma d(L, t - 2T) + d(0, t - T) \quad (8.29)$$

$$d'(L, t) = \gamma d'(L, t - 2T') + d'(0, t - T'). \quad (8.30)$$

Axiale Verschiebung und Verdrehung gehen durch gegenseitige Drehung aus den Verschiebungen d und d' hervor

$$\begin{bmatrix} \delta \\ R\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d' \end{bmatrix}. \quad (8.31)$$

Im Folgenden soll die Verdrehung der Feder am Federausgang weiter betrachtet werden

$$R\psi = \sin \alpha \quad d + \cos \alpha \quad d'. \quad (8.32)$$

Als Ausgangsgröße erhalten wir die Verdrehung am Federausgang

$$\psi(L, t) = \frac{1}{R} (\sin \alpha \quad d(L, t) + \cos \alpha \quad d'(L, t)). \quad (8.33)$$

Abbildung 8.1 visualisiert die aufgestellten Zusammenhänge in Form eines Signalflussgraphen.

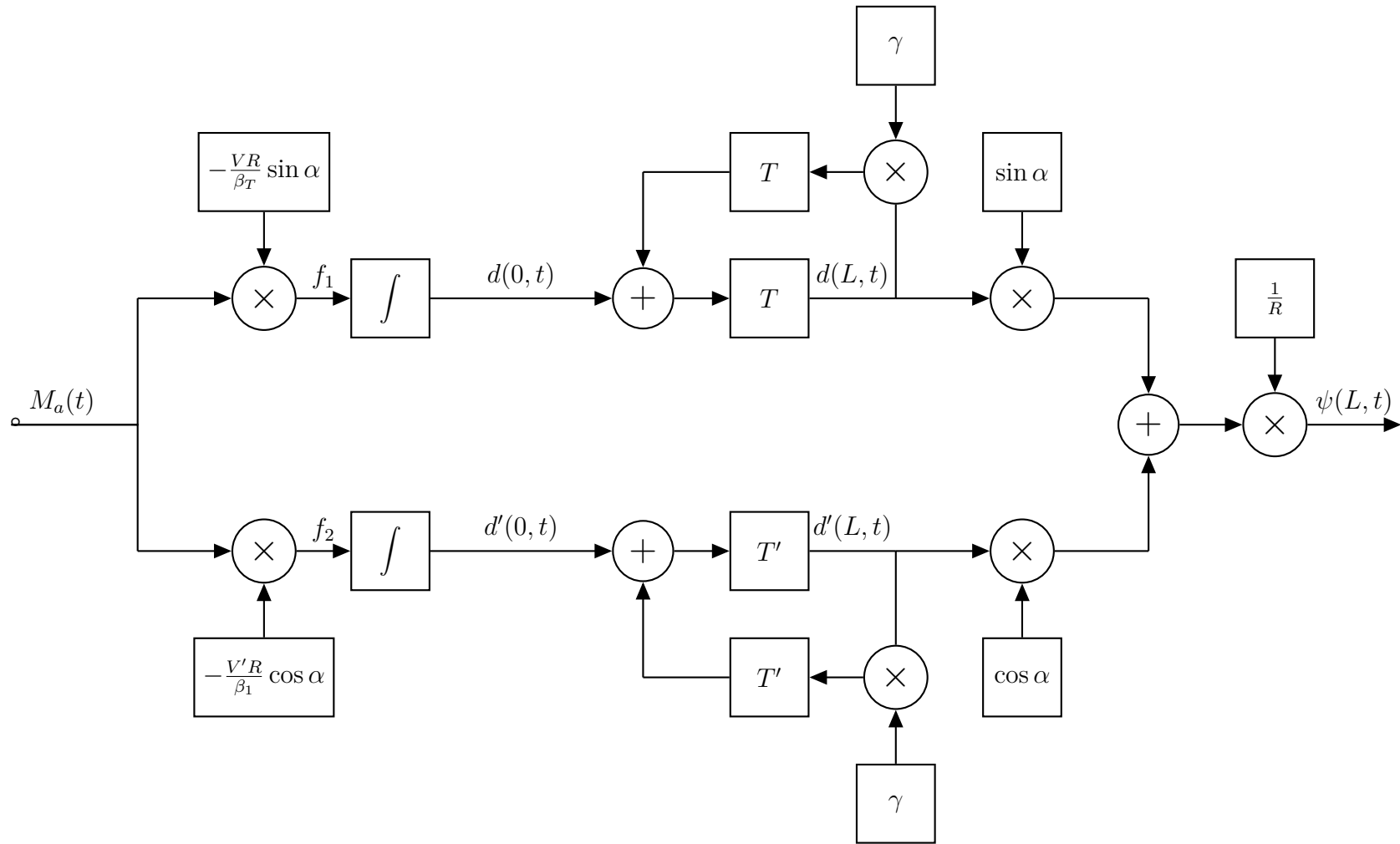


Abbildung 8.1: Realisierende Struktur des auf [Wit66] basierenden Algorithmus.

8.2 Berechnung der Parameter

In diesem Abschnitt sollen die Parameter für das auf [Wit66] basierende Modell berechnet werden.

Zunächst werden dazu hier einige Formeln zusammengestellt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem der beiden Zweige ist gegeben durch

$$V' = \frac{L}{t'_s} = \frac{1}{R} \left(\frac{\beta_1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.34)$$

mit der flexural rigidity

$$\beta_1 = Eak_1^2. \quad (8.35)$$

Alternativ kann diese Geschwindigkeit angegeben werden durch

$$V' = \frac{k_1}{R} \left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.36)$$

k_1 bezeichnet den Drehradius der Feder (radius of gyration). Der Draht wird als kreisförmig im Querschnitt angenommen. Damit gilt

$$k_1 = \frac{1}{2}r. \quad (8.37)$$

r bezeichnet hier den Drahtdurchmesser. Mit Tabelle 7.1 folgt

$$k_1 = 10^{-4}\text{m}. \quad (8.38)$$

Die kreisförmige Querschnittsfläche ergibt sich mit Tabelle 7.1 zu

$$a = r^2\pi = 4 \cdot 10^{-8}\pi\text{m}^2. \quad (8.39)$$

Somit ergibt sich mit den berechneten Größen

$$\beta_1 = Eak_1^2 = 252 \cdot 10^{-18}\text{Nm}^2. \quad (8.40)$$

Einsetzen in (8.36) ergibt

$$V' = \frac{k_1}{R} \left(\frac{E}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} = 126 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (8.41)$$

Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten gilt

$$\frac{V'}{V} = (1 + \nu)^{\frac{1}{2}} \quad (8.42)$$

mit der Poisson-Zahl $\nu = 0,3$. Daraus folgt

$$V = \frac{V'}{\sqrt{1 + \nu}} = 111 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (8.43)$$

Alternativ kann das Verhältnis der Geschwindigkeiten durch

$$\frac{V'}{V} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_T}} \quad (8.44)$$

angegeben werden. Da alle Größen nicht negativ sind, folgt durch Einsetzen der berechneten Größen

$$\beta_T = \frac{\beta_1}{\left(\frac{V'}{V}\right)^2} = 2 \cdot 10^{-16} \text{Nm}^2. \quad (8.45)$$

Die Verzögerungszeiten ergeben sich aus der Definition der Geschwindigkeit

$$v = \frac{x}{t} \Leftrightarrow t = \frac{x}{v}. \quad (8.46)$$

$$T = \frac{L}{V} = 45 \text{ms} \quad (8.47)$$

$$T' = \frac{L}{V'} = 40 \text{ms} \quad (8.48)$$

8.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein einfacher Algorithmus zur Beschreibung eines Federhallgeräts entwickelt. In der Herleitung wurde auf den Einsatz der Sturm Liouville Theorie verzichtet. Außerdem wurden die für die praktische Umsetzung wichtigen Parameter berechnet.

In der praktischen Umsetzung ergab sich, dass der obere Pfad in Abbildung 8.1 durch die Multiplikation mit den Sinustermen deutlich stärker als der untere Pfad gedämpft

wird. Die beabsichtigte Überlagerung zweier Signale mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten ist deshalb nur sehr schwach ausgeprägt.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine physikalische Beschreibung von Federhallgeräten angestrebt. Dazu wurden die physikalischen Randbedingungen an den Enden der Feder beschrieben und Zusammenhänge zwischen Ein- und Ausgangsgrößen des Federhallgeräts und den Ein- und Ausgangsgrößen der Feder aufgestellt. Diese Zusammenhänge wurden als Filtergleichungen formuliert. Eine Untersuchung der Filtergleichungen ergab, dass der Eingangfilter aus zwei parallelen Pfaden besteht: einem direkten Pfad und einem Tiefpassfilter mit einer Eckfrequenz von 626Hz. Der Ausgangsfilter ist ein Differenzierer, besitzt also Hochpasscharakter.

Nachfolgend wurde ein physikalisches Modell für die Hallfeder aufgestellt und in eine dimensionslose Darstellung überführt. Das Modell wurde in eine kompakte Matrixschreibweise gebracht aus der die Randbedingungen an Federeingang und Federausgang abgeleitet wurden.

Das zuvor besprochene Modell war nicht verlustbehaftet. Da aber alle beteiligten physikalischen Effekte mit Verlusten behaftet sind, ist diese Annahme unrealistisch. Die Dämpfung des Signals hat entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis des verhalten Musiksignals. Somit ist die Dämpfung des Signals durch diese Verluste ein wichtiger Bestandteil der Beschreibung des Federhallgerätes. Im Folgenden wurden deshalb Reibungsterme in das bestehende Modell eingeführt, die diese Verluste modellieren sollen. Zur Abbildung in eine dimensionslose Darstellung wurde eine neue Skalierungsvorschrift

hergeleitet. Das Modell wurde mit dieser Vorschrift skaliert.

Zur Herleitung von Filtergleichungen aus dem beschriebenen verlustbehafteten Modell mit Hilfe der Functional Transformation Method (FTM) musste ein charakteristisches Polynom einer System-beschreibenden Matrix berechnet werden. Die Lösung dieses charakteristischen Polynoms erscheint zu komplex als dass eine analytische Berechnung der Eigenwerte auf diesem Wege möglich wäre.

Zum Schluss wurde ein einfaches Modell betrachtet, aus dem ein Algorithmus ohne Hilfe der FTM hergeleitet wurde. Das Modell beschreibt eine Überlagerung zweier Signale mit unterschiedlichen Laufzeiten. Allerdings wird eines der Signale so stark gedämpft, dass dieser Effekt nicht prägnant ausgeprägt ist.

Die Berechnung der Eigenwerte zur FTM basierten Methode und dem verlustbehafteten Modell ist noch nicht analytisch gelöst. Dieses Problem muss in weiterführenden Arbeiten näher untersucht werden. Ebenfalls das einfache Modell ohne FTM muss weiter modifiziert werden um eine wahrnehmbare Überlagerung der Signale verschiedener Laufzeiten zu erhalten.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Darstellung eines Hallfedergeräts [Pra].	5
2.2	Dargestellt ist einer der beiden Eisenkerne mit der Spule, die das magnetische Feld mit dem Eingangs- bzw. Ausgangsstrom verknüpft.	6
2.3	Abmessungen des Kerns und Orientierung des kartesischen Koordinatensystems.	6
2.4	Darstellung des Eisenkerns und des Permanentmagneten als magnetischer Dipol.	6
2.5	Zylinderkoordinaten mit gleicher Orientierung wie in Abbildung 2.3. . .	7
2.6	Blockdiagramm der beteiligten physikalischen Systeme.	7
3.1	Beschreibung des Eisenkerns mit Lufspalt und erregender Spule als magnetischer Kreis	10
3.2	Der Torsionsdraht dargestellt als Zylinder. Es ist ein Zylindersegment eingezeichnet, das mit dem Scherwinkel α tordiert ist.	15
3.3	Der Torsionsdraht im Querschnitt. Eingezeichnet ist der Winkel ϕ der Auslenkung gegenüber der Einspannung, die angreifende Kraft F und der Radius des Drahtes R	15
3.4	Beschreibung der Eingangsgrößen als Filter mit Übertragungsfunktion $H_{\text{in}}(s)$	19
3.5	Bode-Diagramm des Tiefpassfilters $H_{\text{TP}}(s)$	20

4.1	Der Permanentmagnet ist hier als magnetischer Dipol dargestellt. Die graue Fläche im unteren Bereich symbolisiert den Eisenkern. Außerdem sind die wichtigsten Größen aus Gleichung (4.4) eingezeichnet.	23
4.2	Dargestellt ist die Sprungstelle von μ von Luft zum Eisenkern. Außerdem sind die Normal- und Tangentialkomponenten des B-Felds im Eisenkern und im Luftspalt eingezeichnet.	26
4.3	Dargestellt ist ein Querschnitt durch den Eisenkern und den Magneten des Federhallgeräts. Der Eisenkern besitzt eine Ausbuchtung direkt unterhalb des Magneten.	28
5.1	Koordinatensystem der Feder nach [Bil13]	38
8.1	Realisierende Struktur des auf [Wit66] basierenden Algorithmus.	64

Literaturverzeichnis

- [Alb4] ALBACH, Manfred: *Grundlagen der Elektrotechnik*. [Versch. Aufl.]. München : Pearson Studium, 2004- (et Elektrotechnik). – ISBN 3–8273–7106–6
- [Alb12a] ALBACH, Manfred: *Vorlesungsskript - Elektromagnetische Felder I*. Universität Erlangen-Nürnberg, 2012
- [Alb12b] ALBACH, Manfred: *Vorlesungsskript - Elektromagnetische Felder II*. Universität Erlangen-Nürnberg, 2012
- [Bal] BALKE, Herbert: *Einführung in die technische Mechanik: Statik*. 3. Aufl. Berlin and Heidelberg : Springer (Springer-Lehrbuch). – ISBN 978–3–642–10397–1
- [Bal11] BALKE, Herbert: *Einführung in die Technische Mechanik: Kinetik*. Berlin and Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 978–3–642–19743–7
- [Bal14] BALKE, Herbert: *Einführung in die Technische Mechanik: Festigkeitslehre*. 3., aktualisierte Aufl. 2014. Berlin : Springer Berlin, 2014 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 978–3–642–40980–6
- [Bil13] BILBAO, Stefan: Numerical simulation of spring reverberation. In: *Proc. of the 16th Conference on Digital Audio Effects (DAFx-13), Maynooth, Ireland* (2013)

- [Car92] CARLSTONE, Darry S.: Radiation Damping in the Mechanical Oscillator. In: *Proc. Okly Acad. Sci* 72 (1992), S. 45–49
- [Dwo04] DWORSCHAK, Manfred: Der Fledermausmann. In: *Der Spiegel* 22 (2004), S. 156–161
- [Fel13] FELDMEIER, Achim: *Theoretische Mechanik: Analysis der Bewegung - eine physikalisch-mathematische Einführung*. Berlin and Heidelberg : Imprint: Springer Spektrum, 2013 (SpringerLink : Bücher). – ISBN 978–3–642–37717–4
- [Gra13] GRABOW, Jörg: *Verallgemeinerte Netzwerke in der Mechatronik*. München : Oldenbourg, 2013. – ISBN 978–3–486–71261–2
- [GRS07] GIROD, Bernd ; RABENSTEIN, Rudolf ; STENGER, Alexander: *Einführung in die Systemtheorie: Signale und Systeme in der Elektrotechnik und Informationstechnik ; mit 113 Beispielen sowie 200 Übungsaufgaben*. 4., durchges. und aktualisierte Aufl. Wiesbaden : Teubner, 2007 (Lehrbuch Elektrotechnik). – ISBN 978–3–8351–0176–0
- [Har08] HARVILLE, David A.: *Matrix algebra from a statistician's perspective*. [Nachdr.]. New York and NY : Springer, 2008. – ISBN 978 0 387 78356 7
- [LT01] LEE, J. ; THOMPSON, D.J.: DYNAMIC STIFFNESS FORMULATION, FREE VIBRATION AND WAVE MOTION OF HELICAL SPRINGS. In: *Journal of Sound and Vibration* 239 (2001), Nr. 2, S. 297–320. <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.2000.3169>. – DOI 10.1006/jsvi.2000.3169. – ISSN 0022460X
- [Mah15] MAHNKEN, Rolf: *Lehrbuch der Technischen Mechanik - Elastostatik: Mit einer Einführung in Hybridstrukturen*. Aufl. 2015. Berlin : Springer Berlin, 2015. – ISBN 978–3–662–44797–0

- [PR04] PETRAUSCH, Stefan ; RABENSTEIN, Rudolf: A simplified design of multidimensional transfer function models. In: *International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing (SMMSP2004), Vienna, Austria* (2004)
- [Pra] PRANGE, Kurt: *Spring Reverb Tanks Explained & Compared*
- [RKP10] RABENSTEIN, Rudolf ; KOCH, Tilman ; POPP, Christian: Tubular Bells: A physical and algorithmic model. In: *IEEE Transactions on audio, speech and language processing* 18 (2010), Nr. 4, S. 881–890
- [RT02] RABENSTEIN, Rudolf ; TRAUTMANN, Lutz: Multidimensional transfer function models. In: *IEEE Transactions on circuits and systems-I: theory and applications* 49 (2002), Nr. 6, S. 852–861
- [RT03] RABENSTEIN, Rudolf ; TRAUTMANN, Lutz: Digital sound synthesis of string instruments with the functional transformation method. In: *Signal Processing, Elsevier* 83 (2003), S. 1673–1688
- [Sch99] SCHROEDER, Manfred: Die Akustik von Konzertsälen: Physik und Psychophysik. In: *Physikalische Blätter* 55 (1999), Nr. 11
- [Sch15] SCHÄFER, Maximilian: *Physical Modelin of Helical Springs*. Erlangen-Nürnberg, Friedrich Alexander Universität, Diss., 2015
- [Sza72] SZABÓ, István: *Höhere technische Mechanik; Nach Vorlesungen*. 5., verb. und erw. Aufl. Berlin and New York : Springer-Verlag, 1972. – ISBN 3-540-05436-7
- [VPS⁺12] VÄLIMÄKI, Vesa ; PARKER, Julian D. ; SAVIOJA, Lauri ; SMITH, Julius O. ; ABEL, Jonathan S.: Fifty years of artificial reverberation. In: *IEEE Transactions on audio, speech and language processing* 20 (2012), Nr. 5, S. 1421–1448

-
- [Wit66] WITTRICK, W.H.: On Elastic Wave Propagation in Helical Springs. In: *Int. J. Mech. Sei Pergamon Press Ltd* 8 (1966), S. 25–47
- [ZF11] ZURMÜHL, Rudolf ; FALK, Sigurd: *Klassiker der Technik*. Bd. 30: *Matrizen und ihre Anwendungen 1: Grundlagen : für Ingenieure, Physiker und Angewandte Mathematiker*. 7. Aufl. 1997, Nachdr. in veränd. Ausstattung. Berlin and Heidelberg : Springer, 2011. – ISBN 978 3 642 17542 8