

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

**Lehrstuhl für Multimediakommunikation und
Signalverarbeitung**

Prof. Dr.-Ing. André Kaup

Masterarbeit

**Analyse und Optimierung von Portfolios
mittels dünn besetzter Wavelet
Repräsentationen**

von Alexander Stegmann

Dezember 2013

Betreuer: Dr.-Ing. Jürgen Seiler

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Ort, Datum

Unterschrift

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meines Studiums des Wirtschaftsingenieurwesens an der Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg am Lehrstuhl für Multimediakommunikation und Signalverarbeitung im Zeitraum von Juli bis Dezember 2013.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Prof. Dr.-Ing. André Kaup bedanken, der mir mit seinem fachlichen Rat bei dieser Arbeit zur Seite stand.

Meinen ganz besonderen Dank möchte ich Herrn Dr.-Ing. Jürgen Seiler aussprechen, welcher mich betreut und mir jederzeit meine Fragen beantwortet hat. In zahlreichen Diskussionen mit ihm konnte ich nicht nur Wertvolles für diese und andere Arbeiten gewinnen, sondern ich konnte gleichzeitig mein Wissen auf technischer Ebene enorm erweitern.

Des Weiteren möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden bedanken, die mich während dieser Zeit unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	V
Abkürzungsverzeichnis	VII
Formelverzeichnis	IX
1 Einleitung	1
1.1 Themenmotivation	5
1.2 Zielsetzung	7
1.3 Aufbau der Arbeit	8
2 Stand der Portfoliotheorie	11
2.1 Diversifikation	11
2.1.1 Historische Anwendung	12
2.1.2 Mathematische Voraussetzungen	13
2.2 Portfolio Selection	14
2.3 Capital Asset Pricing Model	18
2.4 Arbitrage Pricing Theory	21
3 Stand der Wavelet-Analyse	25
3.1 Prinzipien der Fourier-Transformation	27
3.1.1 Kombination von harmonischen Schwingungen	28
3.1.2 Kurzzeit-Fourier-Transformation	30

3.2	Wavelets als Basisfunktionen	31
3.3	Multiskalenanalyse	33
3.4	Diskrete Wavelet-Transformation	36
3.5	Dünn besetzte Repräsentationen	40
3.6	Variationen der Wavelet-Transformation	43
3.6.1	Wavelet-Familien	43
3.6.2	Anwendungsbereiche	45
4	Ansätze der Zeitreihen- und Portfoliomodellierung mit Wavelets	47
4.1	Wavelets und die Portfoliotheorie	47
4.1.1	Beispiele der Portfoliooptimierung	48
4.1.2	Portfoliooptimierung mit Wavelets	49
4.2	Finanzielle Zeitreihen	51
4.2.1	Grundlagen	51
4.2.2	ARMA-Modelle	52
4.2.3	Zeitreihen stochastischer Volatilität	54
5	Analyse und Konzeptionierung eines Modells	59
5.1	Möglichkeiten einer alternativen Modellrendite	60
5.2	Realisierungsoptionen	62
5.2.1	Simulation zukünftiger Kursverläufe	62
5.2.2	Signalglättung	64
5.3	Voranpassung der Kursdaten	65
5.4	Modellbildung	66
6	Simulation und Validierung	71
6.1	TestszENARIO	72
6.1.1	Ablauf	73
6.1.2	Parameterschätzung	75
6.2	Ergebnisse	75

6.2.1	Kalibrierung	76
6.2.2	Renditen	78
7	Zusammenfassung und Ausblick	87
	Anhang	91
	Abbildungsverzeichnis	95
	Tabellenverzeichnis	97
	Literaturverzeichnis	99
	Lebenslauf	105

Kurzfassung

Die Portfoliotheorie ist seit ihrer Einführung im Jahre 1952 zu einer der wichtigsten Anlagestrategien überhaupt geworden. Aus einer Vielzahl von Wertpapieren werden diejenigen Wertpapiere in einem Portfolio zusammengefasst, deren Preisentwicklungen sich möglichst unterschiedlich verhalten, um einen hohen Diversifikationseffekt zu erzielen. Darüber hinaus sollten diese eine hohe erwartete Rendite und eine geringe Volatilität aufweisen. Aufgrund der Instationarität von finanziellen Zeitreihen wird in dieser Arbeit mit Hilfe der Wavelet-Transformation eine Multiskalen-Analyse durchgeführt, die Aufschluss über die verschiedenen Signalcharakteristiken, die in einer solchen Zeitreihe vorhanden sind, geben soll. Dadurch ist man in der Lage bestimmte Strukturen, die einen negativen Einfluss auf die Auswahl und Gewichtung der Portfolioanteile haben, gezielt auszulöschen. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei auf die Darstellung von Signalen mittels dünn besetzter Repräsentationen gelegt. Das bedeutet, dass ein Signal mit nur wenigen Koeffizienten annähernd rekonstruiert werden kann. Aus den Ergebnissen der Zeitreihenanalyse mit Wavelets werden in Bezug auf die Portfoliotheorie alternative Portfolios gebildet. Mit Hilfe einer Simulation wird anschließend ein Vergleich der verschiedenen Portfolios angestellt, um die verschiedenen Methoden, die diese unterschiedlichen Zusammensetzungen von Wertpapieren verursachen, bewerten zu können.

Abkürzungsverzeichnis

ADS	Adidas AG
ALV	Allianz SE
APT	Arbitrage Pricing Theory
AR	Autoregressive
ARCH	Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
ARMA	Autoregressive-Moving Average
BAS	BASF SE
BAYN	Bayer AG
BEI	Beiersdorf Aktiengesellschaft
BMW	Bayerische Motoren Werke AG
CAPM	Capital Asset Pricing Model
CBK	Commerzbank AG
CON	Continental AG
CVaR	Conditional Value at Risk
DAI	Daimler AG
DAX	Deutscher Aktienindex
DB1	Deutsche Börse AG
DBK	Deutsche Bank AG
DPW	Deutsche Post AG
DTE	Deutsche Telekom AG
DWT	Discrete Wavelet Transform
EOAN	E. On SE

FME	Fresenius Medical Care AG & Co. KGaA
FRE	Fresenius SE & Co KGaA
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
HEI	HeidelbergCement AG
HEN	Henkel AG & Co KGaA
IFX	Infineon Technologies AG
LHA	Deutsche Lufthansa AG
LIN	Linde AG
LXS	Lanxess AG
MA	Moving Average
MRK	Merck KGaA
MUV2	Münchener Rückversicherungs AG
MVP	Minimum-Varianz-Portfolio
RWE	RWE AG
SAP	SAP AG
SDF	K+S Aktiengesellschaft
SIE	Siemens AG
TKA	ThyssenKrupp AG
v. Chr	vor Christus
VaR	Value at Risk
VOW3	Volkswagen AG

Formelverzeichnis

$+$	Addition
$-$	Subtraktion
$/$	Division
$=$	Gleichheit
\int	Integral
∞	Unendlich
S	Signal
A	Approximationsanteil
a	Skalierungsfaktor
b	zeitliche Verschiebung
c	Koeffizient
COV	Kovarianz
D	Detailanteil
d	Koeffizient
$E(\dots)$	Erwartungswert
f	Frequenz oder beliebige Funktion
n	Anzahl
i	Laufvariable
g	beliebige Funktion
h	beliebige Funktion
j	Laufvariable

p	Portfolio oder Ordnung des Prozesses
r	Rendite
T	Anzahl an Perioden
t	Zeit oder bestimmte Periode
$W\{\}$	Wavelet-Transformiertion
X	Transformierte der Funktion x oder stochastischer Prozess
x	Gewichtungsfaktor oder beliebige Funktion
y	beliebige Funktion
α	Parameter des Prozesses
β	Betafaktor oder Parameter des Prozesses
γ	stochastischer Prozess
ϵ	Schwellwert oder Rauschfaktor
μ	Erwartungswert
ν	Konstante
σ	Standardabweichung
τ	Verzögerung
ϕ	Skalierungsfunktion
ψ	Wavelet
ω	Kreisfrequenz oder Konstante

Kapitel 1

Einleitung

Große Gefahren lauerten auf die Seeleute im antiken Griechenland, wenn sie mit ihren Schiffen Waren über die Ägäis hinaus im ganzen Mittelmeer transportierten. Es war keine Seltenheit, dass die See so manches Schiff in ihre Tiefen zog oder dass ein solches der Piraterie zum Opfer fiel. Die Risiken für einen Kaufmann zu dieser Zeit waren immens, diese Art der Unternehmung zu konstituieren. Doch ebenso ließen sich überdimensional hohe Gewinne erzielen, wenn man zu einem der Wenigen zählte, die in der Lage waren, seltene Güter anbieten zu können.

In den Gerichtsreden des Demosthenes aus dem 4. Jahrhundert v. Chr. wird das „*dáneion nautikón*“ beschrieben, eine Art Seedarlehen, welches den Händlern für ihre Geschäfte gewährt wurde. Diese waren damit in der Lage, Schiffe auszurüsten und Waren andernorts einzukaufen, was in der Regel mit einem erheblichen Kapitaleinsatz verbunden war. Um die Risiken für diese Unternehmungen zu minimieren, traten ein oder mehrere Teilhaber an die Seite der Händler, die dem Kreditgeber für dessen Einsatz im Notfall als Schuldner hafteten. Mit dem Verkauf der Waren konnte die Rückzahlung der verliehenen Summe an den Geldgeber erfolgen, der für seine Leistungen meist beachtliche Zinsen nahm [Sch05]. Die Geldgeber beließen es oftmals nicht bei einem einzelnen Darlehen, sondern vergaben mehrere, die sie an verschiedene Händler und ihre Schiffe vergaben. Sie diversifizierten damit das Risiko eines Zahlungsausfalls, der sich aus dem Verlust von Schiff und Waren unter Umständen ergeben konnte, auf

mehrere Personen [Sie93].

Der Begriff des Diversifizierens entstammt dem mittellateinischen „diversificare“ und bedeutet „verteilen“. Das Prinzip der Risikoverteilung wurde im Handels- und Finanzwesen im Laufe der Zeit zu gängiger Praxis und ist heute präsenter denn je. In Form des Seedarlehens findet es sich im Römischen Reich unter dem „foenus naticum“ und im Mittelalter unter der Bodmerei wieder. Mit der Entstehung der ersten europäischen Banken im Italien der Renaissance lassen sich weitere Belege für die Diversifikation von Kapitalanlagen finden. Im 18. Jahrhundert entstanden schließlich Gesellschaften, deren Hauptaufgabe es war, das Anlagevermögen von Investoren gezielt zu verteilen [Tro11]. Die Beteiligung an Unternehmen und der Handel mit Unternehmensanteilen an Kapitalmärkten trat mehr und mehr in den Vordergrund.

Die mathematischen Fortschritte der Statistik im 19. Jahrhundert, wie beispielsweise Sir Francis Galton's Regressionanalyse oder der Korrelationskoeffizient des Franzosen Auguste Bravais und des Engländers Karl Pearson, ermöglichten erstmalig eine Verbindung zwischen Wirtschaft und Mathematik, sodass die bisherige Verwendung von Diversifikation messbar wurde. 1952 revolutionierte schließlich der Ökonom Harry M. Markowitz mit seinem Artikel „Portfolio Selection“ die vorherrschenden Prinzipien der Kapitalanlage und legte den Grundstein für die moderne Portfoliotheorie [Rub02]. Ein Portfolio meint eine Kombination von mehreren Finanztiteln deren Wertentwicklung als Ganzes betrachtet wird. Aufbauend auf seinen Forschungen entstanden in den 1960er und 1970er das Capital Asset Pricing Model (CAPM) und die spätere Arbitrage Pricing Theory (APT), die bis heute zu den wichtigsten Instrumenten der Vermögensdiversifikation zählen [SB07].

Die entscheidenden Größen innerhalb der Portfoliostrukturierung sind die erwartete Rendite und das Risiko der verschiedenen Posten im Portfolio, sowie die Korrelation derer miteinander. Zusammengesetzt aus sich möglichst gegensätzlich verhaltenden Bestandteilen wird versucht, das Risiko des gesamten Portfolios zu diversifizieren [Mar52]. Die Werte der Renditen, Risiken und Korrelationskoeffizienten werden hierbei aus den historischen Wertentwicklungen eines Investments, wie beispielsweise dem Kauf von

Anteilen einer Aktiengesellschaft, berechnet. Mit ihnen wird die Gewichtung einer jeden Position im Portfolio bestimmt. Der Vorgang der Anlagenaufteilung wird dabei auch als Asset Allocation bezeichnet.

So alt die Frage nach der Entscheidung für eine Investitionsmöglichkeit ist, so alt ist auch die sich daraus ergebende Frage nach dem Gewinn. Während sich Anleger einst noch auf ihre eigene Intuition und ihre Fähigkeit, eine realistische Aussage über ein Investment treffen zu können, verlassen mussten, sind durch die stetig zunehmende Datenerfassung besonders innerhalb des letzten Jahrhunderts die historischen Entwicklungen von Finanztiteln in den Vordergrund getreten. Aus der Beobachtung sich über die Zeit ständig ändernder Preise werden Prognosen über künftige Werte erstellt, wodurch eine präzise Aussage über die erzielten Renditen getroffen werden können. Die technische Analyse mit ihren Bewertungsmethoden zählt in diesem Zusammenhang zu einem der bedeutendsten Fachgebiete, die sich auf die reine Beobachtung von Preisentwicklungen konzentriert [Nis05]. Die Datenerfassung und die dadurch verfügbaren Preisentwicklungen bieten nicht nur Möglichkeiten für die Wirtschaftswissenschaften und die Mathematik. Unter dem Aspekt, dass die Preisentwicklung eines Handelsobjekts über die Zeit als ein Signal interpretiert werden kann, zeigen sich Ansatzpunkte für die Ingenieurwissenschaften im Bereich der Nachrichtentechnik, indem beispielsweise aus einem gegebenen Signal eine Prädiktion der künftigen Preisentwicklung erfolgen kann.

In den 1960er Jahren entstand die digitale Signalverarbeitung innerhalb der Nachrichtentechnik, deren Schöpfungen aus heutiger Sicht nicht mehr wegzudenken sind. Einige ihrer wesentlichen Aufgaben sind beispielsweise die Filterung, Modulation und Mischung von Signalen. Aufgrund leistungsfähigerer Computer und verbesserter Herstellungsprozesse für integrierte Schaltungen gab es eine rasante Entwicklung der digitalen Signalverarbeitung, die mehr und mehr Bereiche der bis dahin vorherrschenden Analogtechnik übernahm. Zu den großen Vorteilen dieser Technik zählen die hohe Zuverlässigkeit, die Stabilität der Schaltungen und eine einfachere Produktion [GK97]. Bei einer derartigen Entwicklung und der vielfachen Verwendung dieser Technik liegt

es nahe, sie auch zur Analyse von Entwicklungen an den Wirtschaftsmärkten einzusetzen. Aus ihren Berechnungen heraus können Prognosen über die Preise von Waren erstellt werden. Dabei bedient man sich ihrer Fähigkeit Signale aus verschiedenen trigonometrischen Funktionen rekonstruieren zu können. Mit Hilfe dieser ist die Fortführung eines Signals, in unbekannte Bereiche außerhalb seines eigentlichen Definitionsbereichs, und damit die Vorhersage eines zukünftigen Wertes, wie beispielsweise dem eines Aktienkurses, möglich. In der jüngeren Vergangenheit finden sich eine Reihe von Beispielen für die Verwendung der diskreten Fourier-Analyse für die Vorhersage von Wertentwicklungen. Besonders nachdem man erkannt hatte, dass wiederholende Muster und Zyklen an den Finanzmärkten auftraten, wurde sie auch in diesem Zusammenhang bekannt. Trotzdem findet sie bei der Vorhersage von Kursen nur marginal Beachtung.

In den 1980er kam mit der Wavelet-Transformation eine neue mächtige Zeit-Frequenz-Transformation zur digitalen Signalverarbeitung dazu, die im Gegensatz zur Fourier-Transformation sogenannte „Wavelets“ als Basisfunktionen verwendet. Der Ausdruck Wavelet kommt vom französischen „ondelette“ und kann als „kleine Welle“ übersetzt werden, die die zugrundeliegende Funktion meint. Ursprünglich wurde sie für die Auswertung seismischer Messdaten eingeführt. Doch mit der Zeit fanden sich zahlreiche weitere Anwendungsbereiche [Bän05]. Ihre zeitdiskrete Variante, die diskrete Wavelet-Transformation, wird besonders häufig eingesetzt, da sie ausgezeichnete Codierungseigenschaften besitzt und die Algorithmen, die sie verwenden, in vielen Fällen eine hohe Recheneffizienz aufweisen. Die Bild- und Videoverarbeitung zählt neben der Verarbeitung von Audiosignalen zu den wesentlichen Anwendungsgebieten der Wavelet-Transformation. Bilder werden mit ihr sowohl komprimiert, als auch rekonstruiert. Hinzu kommen die Rauschunterdrückung oder das Erkennen von Mustern [Mer10]. Ihre deutliche Präsenz innerhalb der Signalverarbeitung ist unumstritten, doch auch in anderen Themengebieten lassen sich Anwendungsbeispiele finden.

1.1 Themenmotivation

Die moderne Portfoliotheorie unterstellt den Anlegern, dass sie ihr Kapital auf verschiedene Investments verteilen und dass mit den Größen der erwarteten Rendite, dem Risiko und der Korrelationen ein Optimum dieser Diversifikation erreicht werden kann. Der Begriff des Risikos meint in diesem Fall die Volatilität des Preises eines gehandelten Anlageobjekts, die in Form der Standardabweichung oder seinem Quadrat, der Varianz, ausgedrückt wird [Mar52]. Die Weiterentwicklungen des CAPM und des APT separieren das Risiko weiter in einen systematischen und einen unsystematischen Teil. Das Systematische wird auch als marktspezifisches Risiko bezeichnet und ist durch die Hinzunahme weiterer Investitionsmöglichkeiten des Marktes in ein Portfolio nicht zu diversifizieren. Das unsystematische oder auch unternehmensspezifische Risiko dagegen lässt sich durch Investitionen in andere Unternehmen vollständig eliminieren, sodass ein Anleger beim Halten des sogenannten Marktportfolios auch nur das marktspezifische Risiko trägt [BD11].

Unternehmensanteile und festverzinsliche Wertpapiere zählen zu den wesentlichen Elementen der Portfoliotheorie, doch auf den Kapitalmärkten existieren eine Vielzahl von Finanzinstrumenten, wodurch die Bewertungsmethoden der Finanzmarkttheorie hier auseinandergehen. Während in den 1970er neue Modelle zur Bewertung von Aktien und Portfolios entstanden, veröffentlichten beispielsweise die Wirtschaftswissenschaftler Fischer S. Black und Myron S. Scholes ihre Arbeit des Black-Scholes-Modells, mit dem Finanzoptionen bewertet werden können [BS73]. Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf Markowitz's Portfolio Selection, das CAPM und die APT, die nach wie vor zu den wichtigsten Modellen einer diversifizierten Kapitalanlage und der Bewertung von Portfolios in Bezug auf Risiko und Rendite zählen.

Die moderne Portfoliotheorie stützt sich in ihren Berechnungen auf die drei Größen der erwarteten Rendite, des Risiko und der Korrelation, die für jede mögliche Anlageoption gegeben sein muss. Die Rendite einer Kapitalanlage errechnet sich prinzipiell aus der Differenz zwischen dem Ertrag und dem Aufwand. Sie wird in Prozent im Verhältnis

zum Aufwand angegeben. Die Rendite einer Aktie ergibt sich aus der Kurssteigerung, der Differenz von Verkaufspreis und Kaufpreis, und der Dividende, der jährlichen Gewinnausschüttung an den Aktieninhaber, im Verhältnis zum Ankaufspreis. Verkauft man diese, gelangt man wieder zu dem Verhältnis von Gewinn und Aufwand. Das Risiko wird durch die Standardabweichung von der erwarteten Rendite ausgedrückt. Je größer die Kursschwankungen in einem Zeitabschnitt sind, desto höher ist das Risiko der Kapitalanlage. Schließlich werden die verschiedenen Anlagemöglichkeiten mit ihrer jeweiligen Rendite und ihrem jeweiligen Risiko in Beziehung zueinander gesetzt, sodass eine Aussage über den Gleichlauf der Kapitalanlagen getroffen werden kann. Dieser Gleichlauf von jeder Kapitalanlage zu einer anderen wird mit der Kovarianz dargestellt. Alle drei Größen zur Strukturierung und Gewichtung eines Portfolios basieren auf den historischen Wertentwicklungen einer jeden Kapitalanlage. Diese Zusammenstellung nach den Vorgaben der Portfoliotheorie kann daher nur dann der optimale Fall sein, wenn sich die Aktienkurse ähnlich verhalten wie in den Jahren zuvor. Ist man in der Lage, Werte für eine dieser Größen mit einer höheren Wahrscheinlichkeit zu bestimmen als sie sich auf Basis unmittelbarer historischer Werte ergeben, würde eine andere Gewichtung des optimalen Portfolios entstehen.

Die Wavelet-Transformation ist in der Lage finanzielle Zeitreihen wie die Kursverläufe von Aktien zu analysieren, um lokale Charakteristiken herauszufinden. Die Größe der Zeitfenster kann dabei beliebig skaliert werden, sodass eine ganze Reihe Eigenschaften unterschiedlicher Zeithorizonte sichtbar werden. Kurz- und langfristige Erscheinungen können getrennt voneinander betrachtet werden, wodurch gezielt Signalcharakteristiken ausgewählt werden können, die einen positiven Effekt auf die Vorhersage weiterer Preisentwicklungen von Kapitalanlagen, beziehungsweise auf die zentralen Größen der Portfoliotheorie, haben.

Die Signalverarbeitung brachte eine ganze Reihe verschiedener Ansätze zur Prädiktion von finanziellen Entwicklungen hervor. Ob diese Ergebnisse in ihrer Gesamtheit besser als die der bestehenden Methoden der Finanzanalyse sind, kann nicht eindeutig beantwortet werden. Mit der Kombination aus Verfahren der Signalverarbeitung, zur

Bestimmung der Charakteristiken von Preisentwicklungen, und der Diversifikationsmethodik der Portfoliotheorie, zur Aufteilung von Vermögen auf verschiedene Kapitalanlagen, könnte eine Vereinigung ganz verschiedener Fachgebiete zu dem Ziel einer gewinnbringenden Investmentstrategie führen.

1.2 Zielsetzung

Mit dieser Arbeit soll ein weiterer Schritt auf dem Weg der kollektiven Betrachtung verschiedener Wissensbereiche getan werden. Mit der Verknüpfung von Themen der Wirtschaftswissenschaften und der Signalverarbeitung sollen neue interdisziplinärer Erkenntnisse gewonnen werden. Aufgrund der ungemeinen Fülle an Wissen auf technischer und wirtschaftlicher Seite der eben beschriebenen Materie ist ein Definieren der angestrebten Untersuchungen unabdingbar. Die Schwerpunkte dieser Arbeit liegen in der Anwendung der Wavelet-Transformation auf finanziellen Zeitreihen, der Untersuchung des Verhaltens verschiedener Wavelets auf diese und der Optimierung von Portfolios der modernen Portfoliotheorie auf Basis der Erkenntnisse aus der durchgeführten Signalanalyse.

Für die Zusammensetzung eines Portfolios werden Aktien von Unternehmen, die an der Frankfurter Wertpapierbörse gelistet sind, und Staatsanleihen der Bundesbank in Form von Bundesschatzbriefen herangezogen. Termingeschäfte, Derivate, also abgeleitete Finanzinstrumente, oder auch ausländische Aktien besonders wachstumsstarker Märkte sind aufgrund ihrer im Wesen höheren Volatilitäten in einem ersten Schritt nicht zielführend und daher nicht Bestandteil nachfolgender Untersuchungen. Des Weiteren werden die Analysen und Bewertungen von Portfolios auf die Komponente der erwarteten Rendite abzielen, um den zu analysieren Sachverhalt einzugrenzen und um abschließend eine klare Aussage über die Fähigkeiten der Wavelet-Transformation und ihrer Basisfunktionen in Hinblick auf finanzielle Zeitreihen treffen zu können. Dies beinhaltet eine praktische Umsetzung in Form einer Portfolioerstellung, eine fortlaufende Gewichtung der Portfoliobestandteile und eine Auswertung des Portfoliowertes nach

Ablauf eines Zeitabschnitts, sodass ein konkretes Ergebnis in Form von wöchentlichen, monatlichen oder jährlichen Renditen entsteht, welches mit dem eines gewöhnlich im Sinne der Portfoliotheorie konstruierten Portfolios verglichen werden kann.

1.3 Aufbau der Arbeit

Ausgehend von den theoretischen Grundlagen der Portfoliotheorie und der Wavelet-Transformation versucht diese Arbeit aus beiden Wissensbereichen Notwendiges detailliert zu erläutern, um nachfolgend ein Konzept für die zuvor beschriebene Problematik zu entwickeln. In Kapitel 2 wird daher damit begonnen, auf die risikomindernde Wirkung der Diversifikation einzugehen, wie sie in der Geschichte Verwendung fand, wie sie mathematisch in der modernen Portfoliotheorie beschrieben ist und welche Auswirkungen sie auf das Verhalten der Anleger und Institutionen der Finanzmärkte hat. Anschließend wird konkret auf die Portfoliotheorie eingegangen. Unterschieden wird hierbei das klassische Modell von Markowitz, auch als Portfolio-Selection-Theorie bekannt, das CAPM, mit der Unterscheidung in systematisches und unsystematisches Risiko, und die Arbitragepreistheorie, die sich durch ihre offenen und weniger restriktiven Annahmen auszeichnet. Im Anschluss daran wird mit der Wavelet-Transformation das Augenmerk auf den Bereich der Signalverarbeitung gelegt. Beschrieben werden die Notwendigkeit die bestehende Fourier-Analyse zu erweitern, ihre wesentlichen Vorteile gegenüber dieser, ihre verschiedenen Ausführungsmöglichkeiten und ihr Einsatz in praktischen Anwendungen. Des Weiteren wird das Abbilden von Signalen mittels dünn besetzter Repräsentationen betrachtet. Untersucht werden die Vorteile die sich daraus ergeben und die Auswirkungen, die diese Maßnahme auf die Signale hat. Schließlich werden die Zeitreihen der Finanzmärkte und die Methoden diese in zukünftige Bereiche fortzuführen genauer beleuchtet. Genauso wird der bisherige Einsatz von der Portfoliotheorie und der Wavelet-Analyse im Verbund betrachtet, um mit den weiteren Analysen auf einem aktuellen Wissensstand aufzubauen.

Mit dem nötigen Wissen über die Portfoliostrukturierung mit Hilfe von finanziellen Zeitreihenvektoren von Kapitalanlagen und den Analysemethoden der Wavelet-Transformation wird die Komponente der erwarteten Rendite näher untersucht. Verschiedene Varianten der Renditeschätzung werden miteinander verglichen und deren Portfoliozusammenstellung diskutiert. Anhand eines geeigneten Modells wird diese Zusammenstellung gegen Ende hin auf Basis neuer Renditeberechnungen mit der bestehenden Portfoliostrukturierung verglichen, sodass abschließend ein Fazit aus den Untersuchungen gezogen werden kann.

Kapitel 2

Stand der Portfoliotheorie

Das Gebiet der Vermögensanlage ist ein äußerst umfangreiches, welches in seiner Historie eine Vielzahl von Konzepten hervorgebracht hat. Fakt ist, dass ein Anleger mit seinen aufgewendeten finanziellen Mitteln versucht, sein eigenes Vermögen zu mehren. Die Kapitalanlage in Form von Wertpapieren ist dabei eine gängige Variante, die in der jüngeren Vergangenheit einer immer breiteren Masse zugänglich wurde und zunehmende Beachtung findet. Ein angemessenes Wertpapiermanagement wird daher umso wichtiger, um die Risiken, die solche Investitionen mit sich bringen, einschätzen und begrenzen zu können. Die Portfoliotheorie ist eine wichtige Anlagestrategie und Teil der Kapitalmarkttheorie. Sie trifft wesentliche Annahmen über den Markt und versucht unter diesen eine Möglichkeit aufzuzeigen, durch ein diversifiziertes Portfolio das Gesamtrisiko zu verringern.

2.1 Diversifikation

Das Konzept der Diversifikation ist keine Erfindung Markowitz's, sondern eine Vorgehensweise, die die Menschen aus Vorgängen ihrer Umwelt schlussfolgerten und schon lange vorher anwendeten. Redensarten wie „man soll nicht alles auf eine Karte setzen“ oder das englischen Pendant „don't put all your eggs in one basket“ sind nur einige Weisheiten, die sich darauf beziehen. Die Fortschritte in der Mathematik ins-

besondere der Statistik ebneten schließlich den Weg für ein mathematisches Modell, das auf dem Prinzip der Diversifikation aufbaut und in der modernen Portfoliotheorie verwirklicht wurde.

2.1.1 Historische Anwendung

Wie bereits erläutert, stammen die ersten Belege für ein Diversifizieren von Vermögen aus dem antiken Griechenland des 5. Jahrhunderts v. Chr. Geldgeber minimierten damals ihr Risiko, indem sie ein Darlehen auf mehrere Personen aufteilten, die dann gemeinsam als Schuldner hafteten [Sch05]. Zusätzlich zur Erhöhung der Haftungsmasse durch mehrere Personen investierte die wohlhabende attische Bevölkerung ihr Vermögen in mehrere Händler und deren Geschäfte, wodurch das Gesamtrisiko der Kapitalanlage verteilt wurde. Inwieweit diese Vorgehensweise zu der damaligen Zeit verbreitet war, lässt sich nicht zweifelsfrei feststellen. Gesichert ist jedoch, dass es wohlhabende Bürger gab, die sich damit vor einem möglichen Ruin schützten.

Das griechische Seedarlehen erwies sich in seiner Praxis als äußerst vorteilhaft, weshalb mit dem *foenus naticum* ein römisches Pendant dazu entstand. Es führte die Prinzipien der Risikoverteilung weiter fort und weitete den Bereich der möglichen Sicherheiten aus [Sie93]. Im Handel und der Juristerei entstand somit ein erstes Verständnis für das Prinzip der Diversifikation.

Mit dem Übergang von der Antike zum frühen Mittelalter gingen einige Vermächtnisse des bisherigen Finanzwesens verloren. Erst unter dem Einfluss des Orients zu Beginn des 12. Jahrhunderts entwickelte sich in Italien wieder eine Art Bankensystem. Während der Renaissance erlangten vor allem die florentinischen Bankhäuser enormen Reichtum zu deren bekanntesten das der Familie Medici zählte. Sie schuf ein weitreichendes Netz aus Geschäftsstellen und vermied es so, dass schlecht laufende Geschäfte in einer Region die ganze Bank gefährdeten. Enorme Fortschritte der beschriebenen Diversifikationsstrategien gab es vor allem später in England und den Niederlanden im 17. und 18. Jahrhundert. Die zunehmende Bedeutung des Kapitalmarktes führte zur

Gründung von Gesellschaften, die gezielt Kapital nach dem Prinzip der Diversifikation investierten, um durch diese Verteilung ihre Gewinne zu maximieren. Privatanleger waren dadurch ebenfalls in der Lage diversifizierte Portfolios aus Aktien und Anleihen zu bilden. Zum Ende des 19. Jahrhunderts entstanden somit Investmentgesellschaften, die bestimmte Regeln im Sinne der Diversifikation konkret festlegten. Ein Portfolio hatte demnach Titel verschiedener geographischer Zugehörigkeit, Branchen und Wertpapiergattungen zu beinhalten. Ihr großer Erfolg sorgte dafür, dass zu Anfang der 1920er Jahre Investmentgesellschaften zunehmend populär wurden und diese sich auch in den USA verbreiteten [Tro11].

2.1.2 Mathematische Voraussetzungen

Die diversifizierte Kapitalanlage hat eine weitreichende Historie. Lange Zeit konnte ihr Erfolg mathematisch nicht begründet werden. Vielmehr war sie eine Reaktion auf plötzlich eintretende Verluste und wurde intuitiv angewendet. Sie fußt vor allem auf Erkenntnissen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik. Die Fibonacci-Folge von Leonardo Fibonacci aus dem Jahre 1202 ist eine unendliche Folge von Zahlen, bei der sich eine Zahl aus der Summe der beiden unmittelbar vorangegangenen Zahlen ergibt. Mit ihr wird der mögliche Zusammenhang verschiedener Variablen, wie beispielsweise der Position und dem Zahlenwert, miteinander deutlich, der aber genauso gut auch zwischen den Renditen zweier Wertpapiere und der eines Portfolios bestehen kann. Jakob Bernoulli veröffentlichte 1713 in „Ars Conjectandi“ ein Gesetz der großen Zahlen, das gerne in Zusammenhang mit der Diversifikation angeführt wird. Nach diesem nähert sich die relative Häufigkeit eines Zufallsexperiments der Wahrscheinlichkeit an, wenn das Experiment unter denselben Bedingungen immer wieder durchgeführt wird [Ass00].

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts untersuchte der Engländer Sir Francis Galton in einer Studie den Zusammenhang der Körpergröße von Vätern und ihren Söhnen. Auf ihn geht der Begriff der Regression zurück. Allerdings wurden mathematische Formulierungen zur Regression bereits 1805 von Adrien-Marie Legendre und 1809 von

Carl Friedrich Gauß in der Ausgleichsrechnung und deren Methode der kleinsten Quadrate formuliert [DRR12]. Einer der Schüler Galton's, der Engländer Karl Pearson, entwickelte später mit dem Franzosen Auguste Bravais einen Korrelationskoeffizienten [Sti10]. Dieser stellt ein Maß für den linearen Zusammenhang zweier Merkmale dar.

1952 veröffentlichte Markowitz seine Theorie der Portfolio Selection, in der er die bisherigen diversifizierenden Verhaltensweisen von Investoren begründete und quantifizierte. Im selben Jahr veröffentlichte Andrew D. Roy in der Fachzeitschrift *Econometrica* den Artikel „Safety First and the Holding of Assets“ in der er auf ähnliche Schlussfolgerungen bezüglich des Portfoliorisikos im Vergleich zu den Risiken einzelner Portfoliobestandteile wie Markowitz kommt. Beide Arbeiten verwenden die Varianz beziehungsweise die Standardabweichung als Risikomaß. Wohingegen Roy allerdings auf ein einziges optimales Portfolio abzielt, kommt Markowitz zu dem Ergebnis, dass es eine ganze Reihe davon gibt [Rub02].

2.2 Portfolio Selection

Als sich Markowitz in den frühen 1950er Jahren mit der Zusammensetzung von Wertpapierportfolios beschäftigte, untersuchte er zuallererst das bisherige Verhalten der Anleger. Dazu führte er eine empirische Untersuchung durch, aus der deutlich wurde, dass Investoren ihr Vermögen auf mehrere Wertpapiere aufteilten. Sie diversifizierten in diesem Sinne ihr Kapital, um im ungünstigsten Fall weniger starke Verluste erleiden zu müssen. Er schlussfolgerte daraus, dass die Rendite nicht die einzige zu betrachtende Größe bei der Auswahl einer Kapitalanlage sein kann [SB07]. Andernfalls müsste die gesamte Investitionssumme in ein einziges Wertpapier investiert werden, und zwar das mit der höchsten zu erwartenden Rendite. Wenn die Investoren ihr Kapital aus Sicherheitsgründen diversifizierten, muss das Risiko ebenfalls als Auswahlkriterium miteinbezogen werden. Aus diesem Grund wird in seinem Modell der Portfolio Selection ein Portfolio auf Basis der Größen erwarteter Rendite und Risiko ausgewertet. Die zu

erwartende Rendite

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i \quad (2.1)$$

eines optimal strukturierten Portfolios errechnet sich aus der Addition der gewichteten Einzelrenditen μ_i wie oben angegeben. n ist hierbei die Anzahl der enthaltenen Titel und x_i ist der Gewichtungsfaktor, welcher den Anteil des jeweiligen Wertpapiers im Portfolio ausmacht.

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{pt} - \mu_p)^2 \quad (2.2)$$

Die Komponente des Risikos wird durch die Varianz σ_p^2 ausgedrückt. Während μ_p die zu erwartende Rendite ist, ist r_{pt} die Rendite des Portfolios in der Periode t . T stellt die Anzahl der beobachteten Perioden dar. Als Alternative zur Varianz kann auch die Standardabweichung σ_p als Streuungsmaß verwendet werden, die sich aus der Varianz $\sqrt{\sigma_p^2}$ ergibt.

Damit sich bei einem Portfolio überhaupt Diversifikationseffekte bemerkbar machen, muss die statistische Korrelation der Wertpapiere untereinander kleiner 1 sein. Das bedeutet, dass der Gleichlauf der Wertpapiere miteinander untersucht werden muss, um ein optimale Zusammenstellung zu gewährleisten. Je unterschiedlicher sich die Wertentwicklungen der Portfoliobestandteile verhalten, desto größer ist der durch die Vermögensaufteilung erzielte Effekt. Die Kovarianz Cov_{ij} ist hierbei das Maß für den Renditegleichlauf zweier Wertpapiere. Sie berechnet sich wie folgt.

$$\text{Cov}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \mu_i)(r_{jt} - \mu_j) \quad (2.3)$$

r_{it} und r_{jt} sind die Renditen in der Periode t , μ_i und μ_j die Erwartungswerte der Rendite und T ist die Anzahl der Perioden. Berechnet man die Kovarianzen aller Wertpapierpaare, kann die Portfoliovarianz auch wie nachfolgend gezeigt, aus den einzelnen Portfoliobestandteilen ermittelt werden. Sie berechnet sich aus den Summen aller Multiplikationen vom Gewicht des Wertpapiers i , dem Gewicht des Wertpapiers j und der

Kovarianz Cov_{ij} beider Wertpapiere miteinander.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \text{Cov}_{ij} \quad (2.4)$$

Damit aus den Berechnungen von Rendite, Varianz und Kovarianz ein Portfolio gebildet werden kann, muss eine Regel festgelegt werden. Markowitz unterstellt den Investoren, dass sie ihre Auswahl nur anhand der zu erwartenden Rendite und dem damit verbundenen Risiko treffen. Sie würden sich dem gemäß nach der μ - σ -Regel der Entscheidungstheorie verhalten. Außerdem hätten sie eine risikoaverse Einstellung, wonach ein höheres Risiko nur dann akzeptiert wird, wenn die zu erwartende Rendite deutlich zunimmt. Eine effiziente Kombination aus μ und σ liegt aus diesen Gründen in einem Portfolio nur dann vor, wenn es kein anderes Portfolio gibt, dass bei gleicher zu erwartenden Rendite ein geringeres Risiko aufweist oder bei gleichem Risiko eine höhere zu erwartende Rendite. Um die Portfolios zu ermitteln, die diese effiziente Kombination aufweisen, müssen alle möglichen Kombinationen an Portfoliogewichten durchgetestet werden [SB07]. Die Menge der sich daraus ergebenden Portfolios bildet eine Kurve, wie sie beispielhaft in Abbildung 2.1 mit zwei verschiedenen Wertpapieren

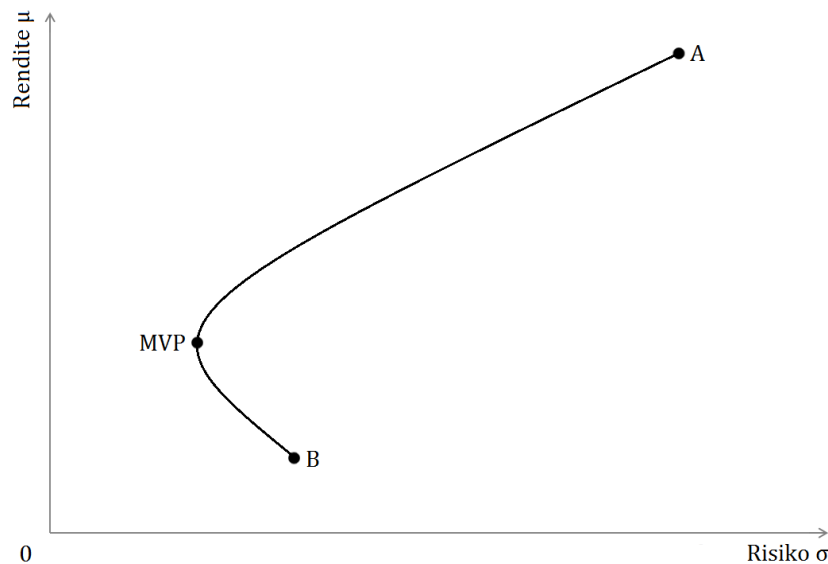


Abbildung 2.1: Zwei Wertpapiere A und B sowie die Menge aller daraus zu erstellenden möglichen Portfolios

dargestellt ist. Für das Wertpapier A ist eine höhere Rendite μ zu erwarten als für B. Allerdings muss ein Anleger bei deren Auswahl eine ebenfalls höhere Volatilität in Kauf nehmen, die hier mit der Standardabweichung σ angegeben ist. Würde man nun sein Vermögen auf diese beiden Wertpapiere beliebig verteilen, würde man sich auf einer Geraden zwischen den beiden Punkten A und B befinden. Aufgrund einer unvollständigen Korrelation der Wertpapiere miteinander, muss eine Veränderung des Preises von A nicht unbedingt eine Veränderung von B verursachen. Ein Unternehmen kann unter Umständen stärker von marktwirtschaftlichen Veränderungen betroffen sein als andere. Das hat zur Folge, dass die Varianzen von A und B sich nicht einfach addieren lassen, sondern sich teilweise sogar aufheben. Die möglichen Kombinationen beider Wertpapiere erzeugen daher Portfolios, die sich entlang einer Kurve bewegen und mitunter eine niedrigere Volatilität als einzelne Wertpapiere haben.

Der Punkt MVP auf der Kurve bezeichnet dabei das Minimum-Varianz-Portfolio. Dessen Kombination hat das niedrigste Risiko aller Portfolios. Portfolios zwischen MVP und B haben demnach ein höheres Risiko und gleichzeitig eine niedrigere zu erwartende Rendite. Sie werden als ineffizient bezeichnet und sind daher für einen Anleger uninteressant. Die Portfolios zwischen MVP und A haben zwar ebenfalls ein höheres Risiko, sie weisen aber auch eine höhere Rendite auf. Sie bilden die sogenannte Effizienzlinie. Da in einem Portfolio meinst mehrere Wertpapiere vereint werden, müssen eine Vielzahl von Variablen berechnet werden. Abbildung 2.2 zeigt beispielhaft eine ganze Reihe an Aktien mit ihren Renditen und Risiken und die daraus resultieren Portfolios auf der Effizienzlinie. Im Vordergrund steht dabei weniger die Anzahl der Bestandteile als deren Korrelation zueinander.

Das Portfolio-Selection-Modell zeigte damit eine mögliche Risikominimierung durch die Kombination verschiedener Wertpapiere und lieferte darüber hinaus erstmals ein quantitatives Ergebnis diversifizierter Kapitalanlagen. Anleger können daraus individuell in Abhängigkeit von ihrer Risikopräferenz ihre eigenen Portfolios anhand der Effizienzlinie erstellen.

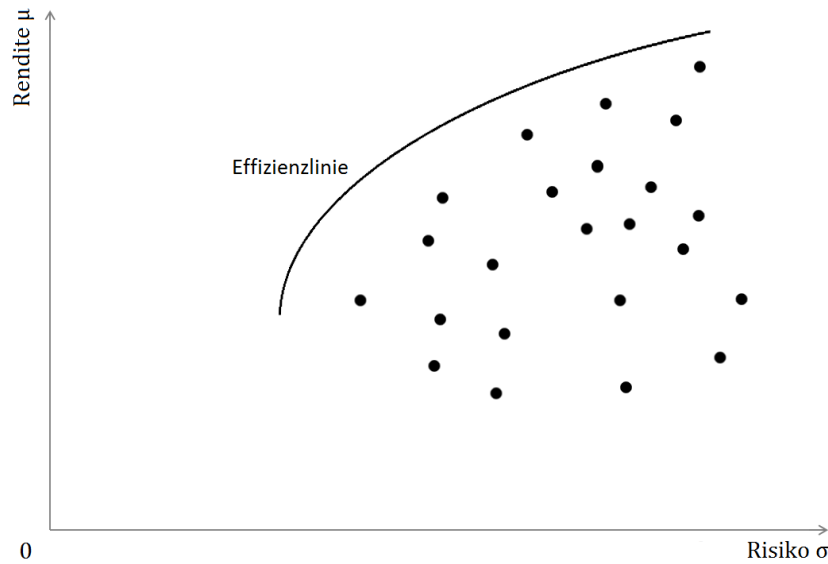


Abbildung 2.2: Effizienzlinie einer Menge an Wertpapieren

2.3 Capital Asset Pricing Model

Die moderne Portfoliotheorie, wie sie in der Literatur geführt wird, geht auf die Arbeiten zur Portfolio Selection von Markowitz zurück. Oftmals wird auch das Jahr 1952 als Geburtsstunde dafür angesehen. Doch nachfolgend gab es eine ganze Reihe weiterer Ökonomen, die in die Kapitalmarktforschung involviert waren und eigene Theorien entwickelten. Mit dem Single-Index-Modell gelang es beispielsweise William F. Sharpe 1963 die bisherige Portfolio Selection dahingehen zu verändern, sodass die Menge an Eingabeparametern und die damit verbundenen Berechnungen deutlich reduziert werden konnten, was zur damaligen Zeit einen enormen Unterschied in der praktischen Anwendung bedeutete [Sha63]. Jahre später wurde dieser Aspekt unter Verwendung von empirischen Untersuchungen noch einmal im sogenannten Marktmodell aufgegriffen. Eine wesentliche Veränderung der Portfolioauswahl vollzog sich mit der Entwicklung des Capital Asset Pricing Model (CAPM) im Laufe der 1960er, an dem eine ganze Reihe an Wissenschaftlern mitwirkten. Wesentliche Beiträge dazu leisteten Sharpe (1964), Litner (1965a,b) und Mossin (1966). Sharpe erhielt gemeinsam mit Markowitz und Merton Miller 1990 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften für seine Forschun-

gen zum Kapitalmarkt. Darüber hinaus bestehen Arbeiten von Jack L. Treynor aus den Jahren 1961 und 1962, die zur damaligen Zeit nicht veröffentlicht wurden, sodass Treynor oftmals als Mitbegründer des CAPM nicht mit angeführt wird [Fre03].

Das CAPM baut auf dem Modell der Portfolio Selection auf, wird aber unter dem Begriff einer Kapitalmarkttheorie geführt. Dabei wird ebenfalls angenommen, dass durch die Diversifikation von Wertpapieren das Gesamtrisiko teilweise eliminiert werden kann. Das CAPM versucht eine Antwort auf die Frage zu geben, welcher Teil dieses Risikos eliminiert werden kann. Es nimmt außerdem an, dass ein risikofreier Zinssatz existiert, zu dem Geld geliehen oder verliehen werden kann [Sha64]. Dadurch würden Anleger eine Mischung aus der risikofreien Anlage, die eine Renditeuntergrenze darstellt, und risikobehafteten Wertpapieren halten. Im Kapitalmarktgleichgewicht, in dem die Mengen an Angebot und Nachfrage übereinstimmen, sei der riskante Teil der Portfolios aller Anleger, unabhängig von deren Risikopräferenz, identisch strukturiert. Dies wird als Tobin-Separation bezeichnet und geht auf den Ökonomen James Tobin zurück. Der riskante gleich zusammengesetzte Teil der Portfolios, das sogenannte Marktportfolio, wird von allen Anleger gehalten. In Abbildung 2.3 werden die Hintergründe dieser Annahme deutlich.

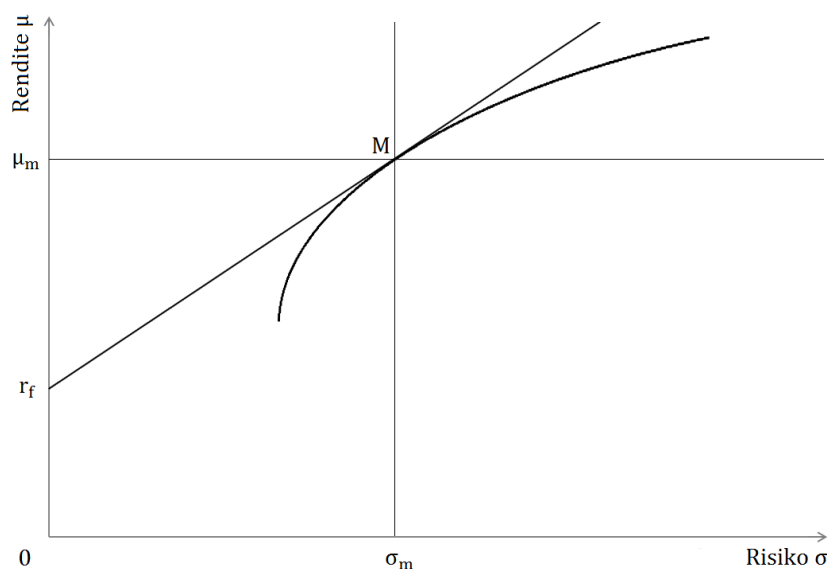


Abbildung 2.3: Kapitalmarktlinie aus risikofreiem Zinssatz und Effizienzlinie

Anleger halten gemäß der Portfoliotheorie ein effizientes Portfolio, welches auf der Effizienzlinie liegt. Verbindet man nun den Punkt der risikofreien Anlage r_f mit einem Portfolio auf der Effizienzlinie, ergeben sich daraus mehrere Geraden. Eine dieser Geraden weißt in Bezug auf das Verhältnis von Rendite und Risiko eine besondere Effizienz auf. Sie geht durch den Punkt r_f und tangiert die Effizienzlinie. Die Gerade selbst wird als Kapitalmarktklinie bezeichnet und kann mathematisch wie folgt formuliert werden.

$$\mu = r_f + \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m} \cdot \sigma \quad (2.5)$$

Das zugehörige Portfolio auf der Effizienzlinie ist das Marktportfolio M , welches von jedem Anleger gehalten wird. Es beinhaltet alle berücksichtigten Anlagen im Verhältnis zu deren Marktwerten. μ_m und σ_m sind dabei deren Erwartungswert und Standardabweichung. Ein Anleger verteilt dementsprechend sein Vermögen auf die risikofreie Anlage und das Marktportfolio und bildet daraus sein eigenes Portfolio. Je nach dessen Risikopräferenz kann er die erwartete Rendite und das Risiko beeinflussen indem er die Gewichtung zwischen risikofreier Anlage und Marktportfolio verändert. Sein Portfolio würde sich damit auf der Kapitalmarktklinie zwischen den Punkten r_f und M bewegen.

Die Kapitalmarktklinie zeigt, dass wenn Anleger bereit sind Risiken zu tragen, sie eine entsprechende Risikoprämie dafür erwarten können. Dies gilt nicht nur für ein Portfolio sondern auch für einzelne Wertpapiere. Deren Eigenschaften können ähnlich dem Marktportfolio mit der Wertpapierlinie dargestellt werden. Der Wert für die Rendite eines einzelnen Wertpapiers errechnet sich aus

$$\mu_i = r_f + (\mu_m - r_f) \cdot \beta_i \quad (2.6)$$

Neben dem risikofreien Zinssatz und der Rendite des Marktportfolios fließt in die Berechnung noch der Faktor β_i mit ein. Dieser Faktor stellt ein Maß für die Risikohöhe im Verhältnis zum Marktrisiko dar. Cov_{im} bezeichnet dabei die Kovarianz zwischen

den Renditen von Wertpapier und Marktportfolio [SB07].

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}_{im}}{\sigma_m^2} \quad (2.7)$$

Das CAPM findet eine weite Verbreitung und ist bereits in zahlreichen Tests untersucht worden. Wohingegen Tests aus den sechziger und siebziger Jahren eher die Aussagen des CAPM bestätigen, neigen jüngere Untersuchungen dazu, dessen Thesen nicht zu bestätigen. Offenbar finden an den Kapitalmärkten Veränderungen statt, deren Auswirkungen nicht vollständig bekannt sind. Trotz dieser Studien zählt das CAPM nach wie vor zu den bekanntesten Modellen, in denen der Zusammenhang zwischen Rendite und Risiko von Wertpapieren erklärt wird.

2.4 Arbitrage Pricing Theory

Die strengen Annahmen des CAPM führten im Laufe der 1970er Jahre zu einem neuen Modell, mit der man die erwartete Rendite von Wertpapieren ermitteln konnte. Stephen Ross veröffentlichte dazu 1976 eine Theorie auf der Grundlage arbitragefreier Märkte, die Arbitrage Pricing Theory (APT). Der Begriff Arbitrage meint das Ausnutzen von Preisdifferenzen für Waren auf unterschiedlichen Märkten, sodass durch den schnellen Kauf und Verkauf ein risikoloser Gewinn entsteht. Darüber hinaus werden in der APT Leerverkäufe miteinbezogen. Bei einem Leerverkauf wird ein Wertpapier von einem Verkäufer verkauft. Dieser ist allerdings zum Verkaufszeitpunkt nicht in Besitz eines solchen Wertpapiers, sodass er sich dieses vorerst leihen muss. Zu einem späteren Zeitpunkt kauft dieser dann selbst ein solches Wertpapier und gibt dieses an den Verleiher zurück. Ein Investor kann mit dieser Methode auf einen fallenden Kurs setzen, indem er zu einem ersten Zeitpunkt hoch verkauft und später zu einem niedrigeren Preis einkauft.

Die APT distanziert sich von dem direkten Zusammenhang von Risiko und Rendite aus der Portfoliotheorie und begründet ihre Theorie auf einen geschlossenen arbitragefreien Markt. Ausgangspunkt der APT ist die Prämisse, dass wenn ein Portfolio mit

einem Wert von Null auch in der Zukunft immer einen Wert Null hat, risikolos sein muss. Wäre dies nicht der Fall, wäre ein risikoloser Gewinn möglich, den Marktteilnehmer sofort durch einen Kauf oder Leerverkauf ausnutzen könnten. Die Chance auf Arbitrage würde demnach verschwinden, sodass der Markt wieder ins Gleichgewicht gebracht wird [Ros76]. Es wird angenommen, dass sich die Rendite r_i des i -ten Wertpapiers aus der linearen Funktion mehrerer gewichteter Faktoren F_j für j von 1 bis n , mit den Sensitivitäten β_{ij} , sowie einer erwarteten faktorunabhängigen Rendite $E(r_i)$ und einem zusätzlichen Störterm ϵ_i ergibt [Ros76].

$$r_i = E(r_i) + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + \dots + \beta_{in}F_n + \epsilon_i \quad (2.8)$$

Aus den einzelnen Wertpapierrenditen erschließt sich die Rendite des Portfolios. Dieses Portfolio wird auch Arbitrageportfolio genannt und wird in einem dreistufigen Prozess erstellt. Der erste Schritt dazu ist, ein Portfolio durch den Kauf oder Leerverkauf von Wertpapieren auf einen Wert von Null zu bringen. Das heißt, die Werte aller gekauften und verkauften Wertpapiere sind in der Summe identisch, sodass sich Käufe und Leerverkäufe aufheben. In einem zweiten Schritt wird das unsystematische Risiko des Portfolios, welches sich hinter ϵ_i verbirgt, eliminiert, wie es bereits aus der Portfoliotheorie bekannt ist. Dazu wird das Portfolio besonders stark diversifiziert aufgestellt, wodurch sich in Folge dessen sehr kleine Anteile aus verschiedenen Wertpapieren in einem ausgedehnten Portfolio ergeben. Der Faktor ϵ_i wäre damit Null und kann vernachlässigt werden. In einem letzten Schritt wird bei dem Portfolio der APT auf das systematische, das vom Markt gegebene Risiko, eingegangen. Dazu wird die Summe, aus den Wertpapieranteilen x_i eines Portfolios multipliziert mit den Sensitivitäten β_{ij} der einzelnen Faktoren F_j , wie folgt zu Null gesetzt.

$$\sum_{i=1}^n x_i \beta_{ij} = 0 \quad (2.9)$$

Die im Wert positiven systematischen Risiken werden mit den negativen systematischen Risiken, hervorgerufen durch die Leerverkäufe, ausgeglichen. Das Ergebnis dieses Prozesses der drei Schritte ist die Grundgleichung der APT, die die Frage nach der

erwarteten Rendite $E(r_i)$ eines Wertpapiers beantwortet.

$$E(r_i) = r_f + (E(r_{F1}) - r_f) \cdot \beta_{i1} + (E(r_{F2}) - r_f) \cdot \beta_{i2} + \dots + (E(r_{Fn}) - r_f) \cdot \beta_{in} \quad (2.10)$$

r_f ist dabei der risikofreie Zinssatz und $E(r_{F1} - r_f)$ repräsentiert die Risikoprämie des ersten Faktors. Dessen Auswirkung auf den Anteil des i -ten Wertpapiers bestimmt die Sensitivität β_i . Hätte man nun ein Wertpapier beziehungsweise ein Portfolio bei dem alle Sensitivitäten Null wären, so wäre das Risiko des Portfolios ebenfalls Null und man würde eine risikolose Rendite erzielen [SB07].

Die APT kommt in ihren Überlegungen wie das CAPM auf eine zukünftige Wertpapierrendite aus der Summe eines risikofreien Zinssatzes und einer Risikoprämie. Beide Theorien unterscheiden sich allerdings darin, dass das CAPM seine Risikoprämie allein aus der linearen Funktion von Rendite und Risiko bezieht und dass die APT hier mehrere Risikoprämien von Faktoren und ihren jeweiligen Sensitivitäten zu Rate zieht.

In diesem Zusammenhang spricht man, wenn es um die APT geht, auch von einem Mehrfaktorenmodell. Die APT schafft auf eine offeneren Weise als das CAPM die Problematik der Renditebestimmung zu erklären und behält sich dabei vor, etwas über die Risikopräferenzen der Anleger zu sagen, um auf gleichgewichtete Preise zu kommen. Genauso wie ein Marktportfolio nicht vonnöten ist. In der Literatur lassen sich daher auch Belege dafür finden, dass das CAPM als ein Spezialfall der APT angesehen wird [BD11]. Mit der Einführung mehrerer Faktoren hat die APT einen wesentlichen Beitrag zur Erklärung der Renditen von Wertpapieren und Portfolios geleistet. Doch auf die Frage, wie diese Faktoren im einzelnen zu bestimmen sind, gibt die APT keine Antwort. In der Praxis werden für eine Ermittlung empirische Untersuchungen durchgeführt, in denen mikro- und makroökonomische Faktoren betrachtet werden.

Kapitel 3

Stand der Wavelet-Analyse

Die Wavelet-Transformation ist eine lineare Zeit-Frequenz-Transformation, die im Laufe der 1980er von dem Geophysiker Jean Morlet und anderen entwickelt wurde. Sie stellt ein mathematisches Werkzeug dar, um Funktionen zu approximieren und um eine hierarchische Darstellung der Bestandteile eines Signals zu ermöglichen [Mer10]. Wavelets sind die Basisfunktionen, die hierbei verwendet werden. Eine Funktion kann mit Hilfe der Wavelet-Transformation aus der Summe von Näherungen, angefangen von groben zu immer feineren, ähnlich einer Fourier-Reihe abgebildet werden. Sie wird daher auch als eine Art Erweiterung zur Fourier-Analyse angesehen. Sie entstand aus der Notwendigkeit einer alternativen, für die Seismik, effizienteren Analyse derer Daten, wie sie bisher mit der Fourier-Transformation möglich war. Morlet setzte sie zur Erkennung von Erdölvorkommen unter der Erde ein [Hub97]. Bei dem damals für diesen Sachverhalt üblichen Verfahren wurde ein Signal in die Tiefe ausgesendet und dessen Echo wieder aufgenommen. Darüber gewann man Auskunft, wie tief oder dick die unterliegenden Erdschichten waren und welche Zusammensetzung sie hatten. Aus den etlichen Schichten, die das Signal zurückwarfen, entstand ein Durcheinander an Informationen, die auseinander dividiert werden mussten.

Die steigende Leistungsfähigkeit moderner Rechner ermöglichten der hierfür bisher verwendeten Fourier-Analyse eine immer genauer werdende Auflösung hochfrequenter Signalanteile mit noch schmaleren Beobachtungsfenstern. Doch mit deren Überlap-

pung zeigten sich die Grenzen des Verfahrens. Ein gewisses Maximum war erreicht. Mehr Details konnten mit dieser Methode nicht aus dem untersuchten Signal aufgelöst werden, weshalb man nach anderen Verfahren suchte, die letztlich zu dem einer Wavelet-Transformation führten [Hub97].

Die Signalverarbeitung zählt zu einem der Hauptanwendungsgebiete der Wavelet-Transformation, die deren Entwicklung wesentlich mit vorangetrieben hat. Ein hohes Maß an Zuspruch erlangte sie vor allem aufgrund ihrer Fähigkeiten in der Kompression und Glättung von Signalen. Typische Anwendungsbeispiele dazu sind akustische oder visuelle Signale in Form von Musik oder Bildern. Genauso werden aber auch statistische Analysen von Daten der Medizin, der Astronomie, den Finanzmärkten oder der Physik durchgeführt. Ihre Einsatzmöglichkeiten liegen quasi überall dort, wo Daten mathematisch verarbeitet und analysiert werden [Mer10].

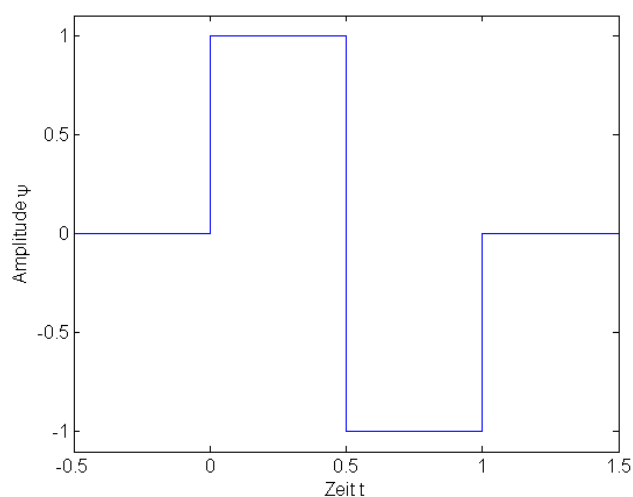


Abbildung 3.1: Haar-Wavelet

Die Ursprünge der Wavelet-Transformation sind ebenso vielfältig wie deren Anwendungsmöglichkeiten. Sie reichen zurück bis zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Das allererste Wavelet geht auf den ungarischen Mathematiker Alfréd Haar und das Jahr 1909 zurück [Bän05], welches aus der Kombination zweier Rechteckfunktionen gebildet

werden kann (siehe Abbildung 3.1). Das Haar-Wavelet $\psi(t)$ ist durch

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1)$$

definiert und dessen dazugehörige Skalierungsfunktion $\phi(t)$ ist der Rechteckimpuls

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.2)$$

Im Bereich der Mathematik war es besonders die Funktionalanalysis, die einen wesentlichen Beitrag zur Wavelet-Transformation lieferte. Die Theorie zur Wavelet-Transformation basiert zum Teil auf mathematischen Hilfsmitteln und Verfahren der vorangegangenen Jahrzehnte, teilweise entstand sie aber auch erst mit den praktischen Anwendungen der Transformation. Aus diesem Grund ergibt sich ein Entwicklungsprozess, der von vielen verschiedenen Bereichen vorangetrieben wurde. Mit dem Fortschritt der Computertechnik und der Algorithmen wurde es schließlich möglich, diese Hilfsmittel und Verfahren praktisch anzuwenden, wodurch sich die starke Verbreitung ab den 1980er Jahren erklärt [Hub97].

3.1 Prinzipien der Fourier-Transformation

Wenn es um das Thema Signalverarbeitung geht, kommt man nicht umher sich mit der Fourier-Analyse zu beschäftigen. Die Errungenschaften des französischen Mathematikers Jean B. J. Fourier zu Beginn des 19. Jahrhunderts hatten weitreichende Folgen für eine ganze Reihe an Wissenschaften. Für die Signalverarbeitung ist die Fourier-Analyse ein unentbehrliches Hilfsmittel geworden, wenn es darum geht periodische Funktionen darzustellen. Des Weiteren wurde mit der Umsetzung eines schnellen Algorithmus, der Fast Fourier Transform, eine Möglichkeit geschaffen, die Fourier-Analyse um ein

Vielfaches effizienter anzuwenden, sodass sich heute zahlreiche Wissensbereiche ihrer bedienen.

3.1.1 Kombination von harmonischen Schwingungen

Bei der Fourier-Transformation wird eine Funktion $x(t)$ mit Hilfe von stetigen Sinus- und Kosinusfunktionen in verschiedene Bestandteile zerlegt. Die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ zeigt dabei die einzelnen Frequenzen, die im Zeitverlauf in einem Signal enthalten sind und liefert eine Gewichtung für jede dieser. Sie wird auch als Spektrum des Signals $x(t)$ bezeichnet und ist für ein zeitkontinuierliches Signal wie folgt definiert [Mer10].

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.3)$$

Die Variable ω ist durch $\omega = 2\pi f$ gegeben, wobei f die Frequenz ist. In Abbildung 3.2

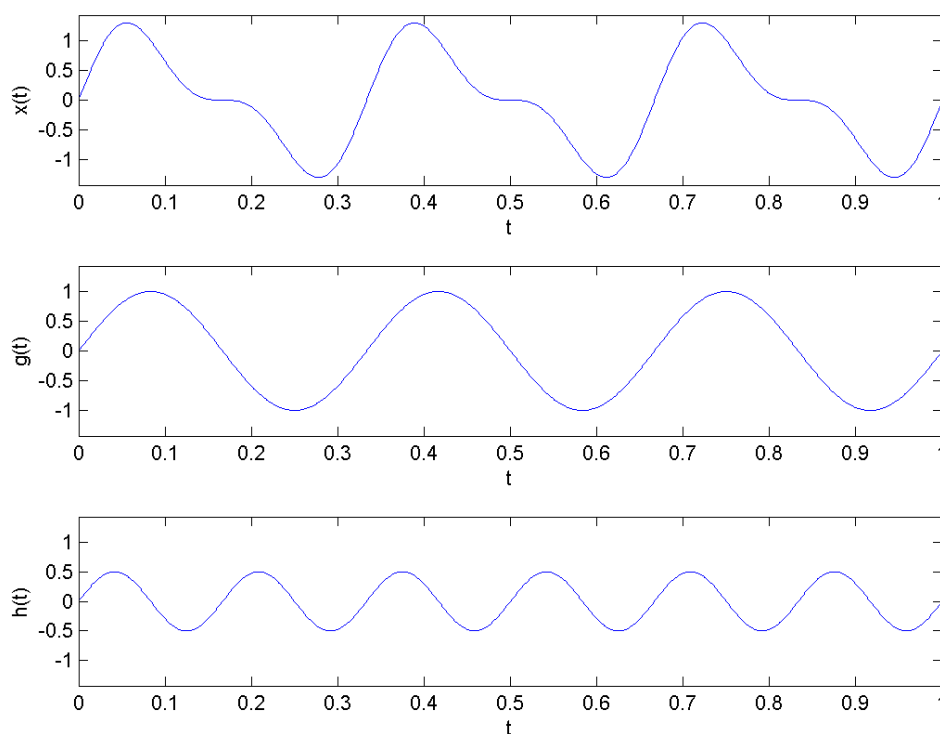


Abbildung 3.2: Zerlegung eines Signals in zwei harmonische Funktionen

wird beispielhaft eine Funktion $x(t)$ gezeigt, die sich aus den harmonischen Funktionen $g(t)$ und $h(t)$ zusammensetzt. Deren Frequenzspektrum $X(\omega)$ von dem Signal $x(t)$ zeigt Abbildung 3.3. Aus diesem können zwei Frequenzen, eine bei 3 und eine bei 6 Hz, identifiziert werden, die den Funktionen $g(t)$ und $h(t)$ entsprechen. Des Weiteren wird deutlich, dass sich ein kleiner Teil des transformierten Signals auf andere Frequenzen als die eben genannten verteilt. Dies geschieht, wenn in einem Signal noch andere Anteile als reine Sinus- und Kosinusfunktionen, aufgrund von gerundeten Berechnungen oder Fehlern, enthalten sind.

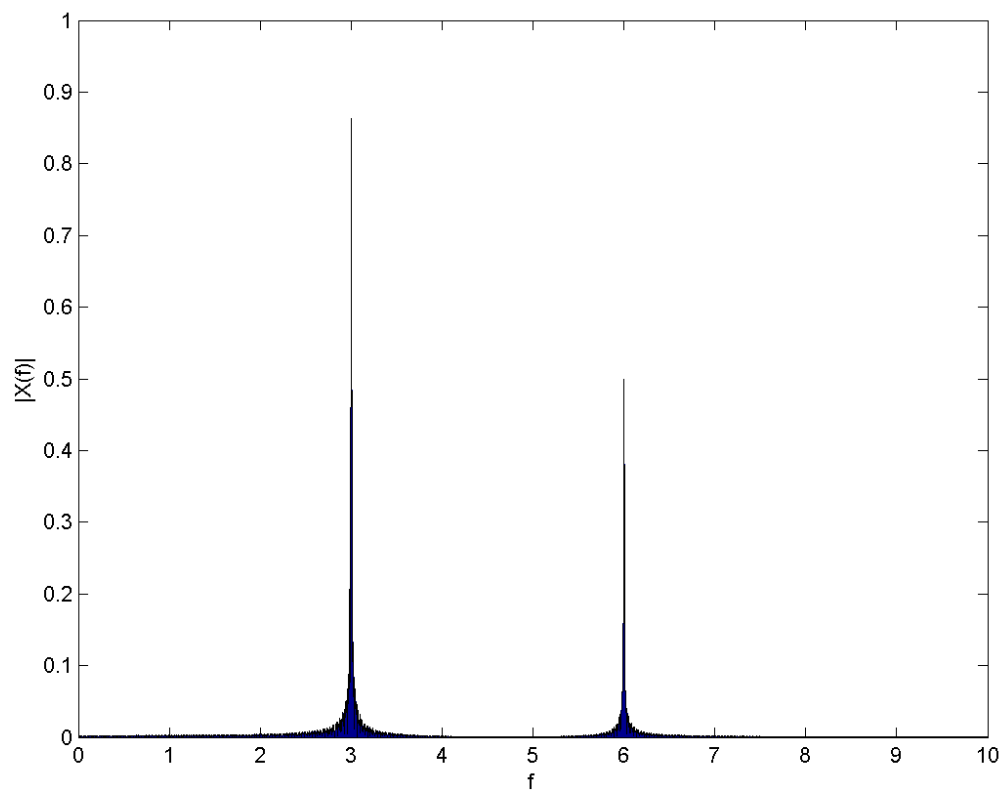


Abbildung 3.3: Frequenzspektrum des Signals $x(t)$

Die Fourier-Transformation ist in der Lage ein Signal in harmonische Schwingungen zu zerlegen. Was sie allerdings nicht zeigt, ist wann eine Frequenz in einem Signal ange-regt wurde oder wann diese wieder verschwindet. Demnach enthält ein Signal zu jeder

Zeit dieselben Frequenzen. Die Information über das zeitliche Eintreten einer Frequenz geht durch die Transformation nicht verloren, da sonst eine Rücktransformation und die Rekonstruktion des Ausgangssignals nicht möglich wären. Allerdings wird diese durch den Prozess allein nicht sichtbar [Hub97]. Aus diesem Grund ist die Information über einen ganz kurzen Moment des Signals über alle Frequenzen verteilt. Lokale Unstetigkeiten lassen sich daher kaum ermitteln. Außerdem bietet diese Schwäche der Fourier-Analyse eine große Angriffsfläche für Fehler. Verarbeitet man ein längeres Signal und es treten kurzzeitige Störungen auf, kann dies die gesamte Fourier-Transformierte unbrauchbar machen. Unabhängig davon ob es sich um relevante Informationen oder um eine Störung handelt, werden diese auf das gesamte Spektrum verteilt.

3.1.2 Kurzzeit-Fourier-Transformation

Mit der Fourier-Transformation kann ein Signal hinsichtlich der Zeit oder der Frequenz analysiert werden. Beides gleichzeitig ist nicht möglich. Dabei gibt es eine ganze Reihe instationärer Prozesse, bei denen man sich für die Zuordnung ihrer spektralen Anteile zu einem bestimmten Zeitabschnitt interessiert. Um eine Analyse in beiden Bereichen durchführen zu können, führte Dennis Gábor 1946 die Kurzzeit-Fourier-Transformation, in englisch Short-Time Fourier Transform (STFT), ein. Es handelt sich hierbei um eine gefensterte Fourier-Analyse, mit der versucht wird die Koeffizienten der Fourier-Transformation abschnittsweise zu berechnen. Für die Lokalisierung der Frequenzen wird meist eine Rechteck-Funktion oder eine Gaußsche Glockenkurve als Fenster verwendet. Im Falle einer Gauß-Funktion spricht man in diesem Zusammenhang von einer Gabor-Transformation [Mer10]. Die Fourier-Transformierte des gefensterten Signals errechnet sich nun aus

$$X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \quad (3.4)$$

Zu der Gleichung 3.3 ist die Funktion des Fensters hinzugekommen, die hier mit $g(t)$ dargestellt ist. Dieses unterdrückt das Signal $x(t)$ außerhalb des gefensterten Bereiches. Der Parameter τ bestimmt die zeitliche Verschiebung von $g(t)$. Die Größe des Fensters

gibt den zu analysierenden Signalausschnitt, der mit den Sinus- und Kosinusfunktionen verglichen wird, an. Nach und nach wird das Fenster dem Signal entlang verschoben. Dadurch ist man in der Lage, den Zeitraum auftretender Frequenzen näher zu bestimmen. Der zeitliche Wechsel einer Frequenz kann in einem Spektrogramm sichtbar gemacht werden.

Je kleiner die Fenstergröße gewählt wird, desto besser ist die zeitliche Auflösung der Frequenzen. Der Nachteil eines schmalen Fensters liegt allerdings darin, dass sich niedrigfrequente Signalanteile kaum noch erkennen lassen, weil deren Schwingungen schlichtweg nicht mehr in das Fenster passen. Im umgekehrten Fall, in dem man ein breites Fenster wählt, werden die niedrigen Frequenzen gut erkennbar, jedoch wird die Analyse weniger zeitempfindlich, sodass das Bestimmen eines Zeitpunktes des Auftretens von bestimmten Frequenzen immer undeutlicher wird. An diesem Beispiel wird deutlich, dass ein Signal nicht beliebig genau in Bezug auf Zeit und Frequenz bestimmt werden kann. Es kann lediglich ein Abwägen zwischen einer guten zeitlichen Auflösung und einer entsprechenden Auflösung im Frequenzbereich geben. [Bän05]

3.2 Wavelets als Basisfunktionen

Mit der Kurzzeit-Fourier-Transformation ist es möglich geworden die Fourier-Analyse um den Aspekt des zeitlichen Auftretens von Frequenzen zu erweitern und so nichtstationäre Signale, die sich im Laufe der Zeit verändern, zu untersuchen. Nichtsdestotrotz bleibt das Problem einer geeigneten Darstellung, ohne einen Verlust in der Auflösung von Zeit oder Frequenz hinnehmen zu müssen. Des Weiteren werden auch innerhalb eines kurzen Zeitfensters Unstetigkeiten immer noch über dessen Spektrum verteilt. Die Verwendung von Basisfunktionen, die sich über den gesamten Definitionsbereich ausdehnen, schien daher ungeeignet für die Bestimmung zeitlicher Informationen. Aus diesem Grund gingen die weiteren Untersuchungen dahin, die bisherigen Basisfunktionen für spezielle Anwendungsfälle zu ersetzen. Außerdem wurden eine Reihe von Anforderungen an neue Basisfunktionen aufgestellt. Demnach sollte mit ihnen eine

Darstellung von einer genügend großen Klasse an Funktionen möglich sein und die Analyse und Synthese sollte numerisch schnell und stabil umsetzbar sein. Außerdem müssten diese Basisfunktionen zeitlich gut lokalisierbar sein. Sie wären daher nur für einen beschränkten Bereich von Null verschieden. Genauso ist eine gute Lokalisierung im Frequenzbereich wichtig [Bän05]. Gemäß den Anforderungen entstand in den 1980er eine Methode der Signalanalyse, die diesen gerecht werden sollte. Mit der Wavelet-Transformation wurde die eben beschriebene Problematik der Fourier-Analyse und der STFT aufgegriffen und eine alternative Herangehensweise erforscht.

Die Wavelet-Transformation hat das Ziel, die in einem Signal verborgenen Informationen in Koeffizienten zu überführen, die sich zum Speichern und Übertragen (aber auch zum Weiterverarbeiten) analysieren oder zur Rekonstruktion des Ausgangssignals eignen. Die Koeffizienten entscheiden über die Gewichtung der Wavelets, um das Signal wiederherzustellen. Die Superposition von Wavelets funktioniert hier genauso gut, wie die aus Sinus- und Kosinusfunktionen in der Fourier-Analyse. Eine Funktion f kann demnach als Linearkombination einer Grundfunktion ψ_k mit entsprechendem Koeffizienten c_k dargestellt werden.

$$f = \sum_k c_k \psi_k \quad (3.5)$$

Einer der wesentlichen Unterschiede der Verfahren von Fourier- und Wavelet-Analyse liegt in der Streckung der Basisfunktionen. Diese verändern ihre Frequenz durch eine Skalierung und passen sich somit an die verschiedenen Signalbestandteile an. Hohe Frequenzen werden mit kurzen Fenstern beziehungsweise stark gestauchten Wavelets und niedrige mit weiten und gestreckten Wavelets erfasst. In Form einer mathematischen Gleichung ergibt sich ein zeitlich verschobenes und gestrecktes Wavelet $\psi_{a,b}$ durch ein unverändertes Wavelet ψ , das auch als Mutter-Wavelet bezeichnet wird, wie folgt

$$\psi_{a,b}(t) = \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) a^{-\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

Während ein Faktor a die Skalierung des Wavelets bestimmt, gibt der Faktor b die Position dessen an. Die zeitkontinuierliche Wavelet-Transformierte W_ψ einer Funktion

$x(t)$ ist bei Verwendung eines bestimmten Wavelets ψ , einer Skalierung a und einer Position b , definiert durch

$$W_\psi\{x(t)\}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)a^{-\frac{1}{2}}dt \quad (3.7)$$

Sie berechnet sich demnach aus dem Produkt von dem Signal $x(t)$ und einer Funktion $\psi(t)$, die skaliert und zeitlich verschoben werden kann. Der Faktor a liefert eine kontinuierliche Menge an Skalen und b bestimmt eine kontinuierliche Menge an Positionen [BEL07]. Mit der Wavelet-Transformation vollzieht sich somit, aufgrund ihrer vielen verschiedenen Skalen und Positionen, eine Mehrfachauffösung oder auch Multiskalenanalyse, die im nachfolgenden Kapitel erläutert werden soll.

3.3 Multiskalenanalyse

Mitte der 1970er begann man, bereits vor den Wavelets die Darstellung der Fourier-Analyse von Zeit oder Frequenz noch einmal zu überdenken. Zeitlich lokale Aussagen über ein Signal waren mit ihr nicht möglich, es sei denn man verkleinerte ihr Beobachtungsfenster und nahm den Informationsverlust niedriger Frequenzen in Kauf. Anstatt die Breite des Fensters festzuhalten und dieses mit Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen zu füllen, kam man auf die Idee, die Anzahl der Frequenzen festzuhalten und die Fenstergröße zu verändern. Die verwendeten Basisfunktionen wurden dabei ebenfalls gedehnt, sodass deren Frequenzen zwingend mit abnahmen. Analog dazu entstanden höhere Frequenzen beim Stauchen der Basisfunktionen [Hub97].

Für die Multiskalen-Analyse mit Wavelets ergibt sich das folgende Vorgehen, wie es in Abbildung 3.4 dargestellt ist. Ein Signal wird zuerst grob mit einem weiten Wavelet hoher Skalierung verglichen. Dazu wird ein Abschnitt des Signals einem Wavelet gegenübergestellt und ein Korrelationskoeffizient berechnet. Anschließend wird das Beobachtungsfenster inklusive Wavelet verschoben und erneut ein Vergleich angestellt. In jedem weiteren Durchlauf wird dieser Vergleich immer genauer, weil die Wavelets schmaler werden. Ein schmaler werdendes Wavelet bedeutet eine höhere Auflösung,

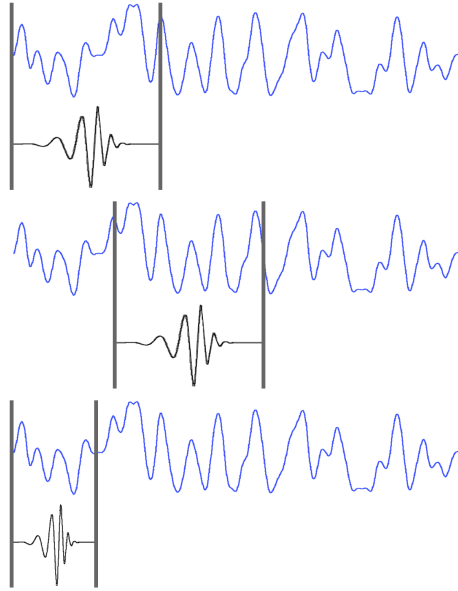


Abbildung 3.4: Vergleich eines Signals mit skalierten Wavelets

wodurch schnelle kurzfristige Änderungen übernommen werden können. Umgekehrt bedeutet eine hohe Skalierung ein breites Wavelet mit einer niedrigen Auflösung. Die Multiskalenanalyse approximiert damit Funktionen auf unterschiedliche Skalen beziehungsweise Auflösungen, die durch die Skalierungsfunktion

$$\phi_{mn}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^{-m}t - n) \quad (3.8)$$

des verwendeten Wavelets geliefert werden. Wohingegen der Faktor m die Skala bestimmt, sorgt n für die Verschiebung der Funktion. Ein Wavelet $\psi(t)$ kann aus der Skalierungsfunktion mit

$$\psi(t) = 2 \sum_n d_n \phi(2t - n) \quad (3.9)$$

unmittelbar entnommen werden. Die Skalierungsfunktion wird deshalb auch als Vater-Wavelet bezeichnet wird [BEL07]. d_n repräsentiert die Koeffizienten des Wavelets. Am Beispiel des Haar-Wavelet wird dieser Sachverhalt gut sichtbar. Das Haar-Wavelet besteht aus zwei Skalierungsfunktionen, welche selbst zwei Rechteckimpulse sind, die das Wavelet mit

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1) \quad (3.10)$$

bilden. Die Koeffizienten betragen in diesem Fall $d_0 = 1/2$ und $d_1 = -1/2$. Für alle anderen gilt $d_n = 0$.

Alternativ zur Auflösung könnte man bei dieser Methode auch von einer Zeit- oder Längenskalierung sprechen, weil sich die Werte der Wavelets bezüglich dieser Eigenschaften verringern. Am Ende der Vergleiche ergibt sich ein Skalendiagramm wie beispielsweise in Abbildung 3.5. Dargestellt ist eine sich über die Zeit in puncto Frequenz verändernde Sinus-Schwingung und das dazugehörige Skalendiagramm der diskreten Wavelet-Transformation.

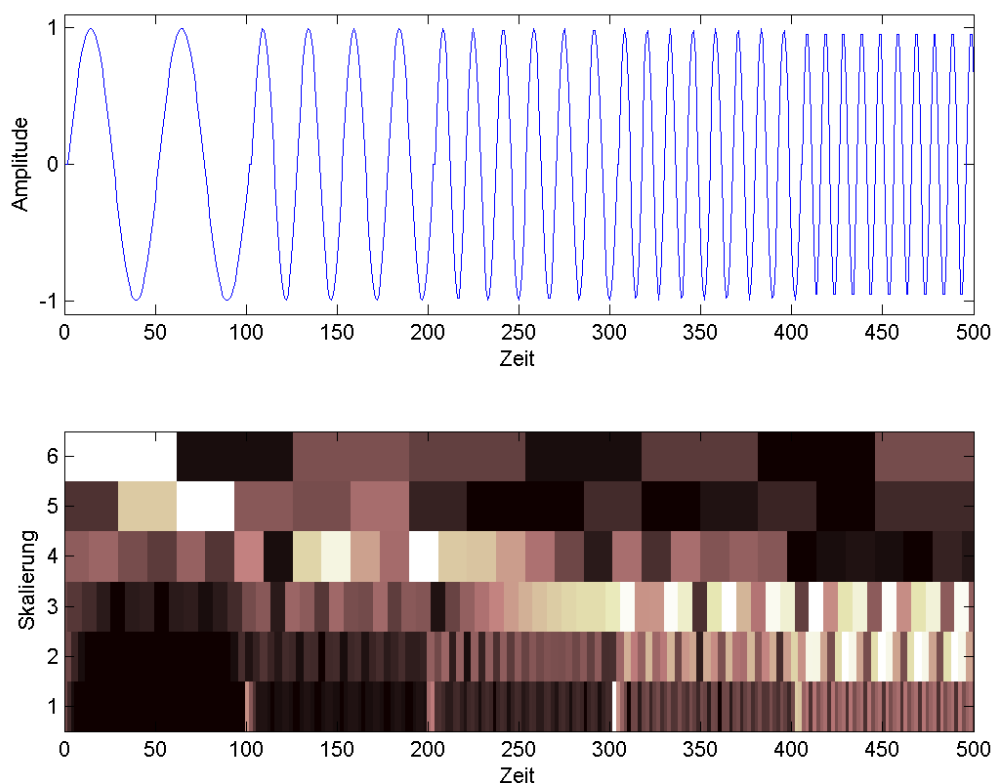


Abbildung 3.5: Ein beispielhaftes Signal mit seinem dazugehörigen Skalendiagramm

Insgesamt wurde ein Wavelet sechs verschiedener Längen angewendet. Im Skalendiagramm repräsentiert die Abszissenachse die Zeit, die Ordinatenachse die Skalierung eines Wavelets und die Punkte aus den Koordinaten beider Achsen die Amplitude des

Wavelet-Koeffizienten in unterschiedlichen Helligkeitswerten. Je heller eine Fläche ist, desto größer ist der Korrelationskoeffizient beziehungsweise desto größer ist die Übereinstimmung vom Wavelet zum untersuchten Signalausschnitt.

Wird ein Signal mit Wavelets unterschiedlicher Skalierung abgetastet, hat das einen ähnlichen Effekt wie die Verwendung mehrerer Filter. Tiefe Frequenzen werden mit weiten Wavelets erfasst, hohe Frequenzen mit schmalen. Es ist eine Besonderheit der Wavelets, dass sich mit der Veränderung der Auflösung gleichzeitig die Skala und die Frequenz ändern. Aufgrund der Ähnlichkeit gestauchter und gestreckter Wavelets zueinander bezeichnet man sie auch als Wavelets konstanter Form, sodass man sie von den Gaborschen Wavelets abgrenzen kann [Hub97].

3.4 Diskrete Wavelet-Transformation

Die Skalen der diskreten Wavelet-Transformation, die für die Vergleiche eines Signal verwendet werden, unterscheiden sich immer um den Faktor zwei. Das Abtasttheorem nach Shannon wird dadurch eingehalten. Darüber hinaus werden keine zusätzlichen Informationen aus dem untersuchten Signal entnommen. Die Anzahl der Wavelets verdoppelt sich mit jeder Verdopplung der Frequenz. Es entsteht damit eine ganze Familie von Wavelets, die sich untereinander in ihrer Skalierung unterscheiden. Diese werden nach und nach entlang des Signals verschoben, um verschiedene Abschnitte abzutasten. Wichtig dabei ist, dass die Unterteilung des Signals in Abschnitte von der Länge der Skalierungsfunktion erfolgt, wodurch die charakteristischen Koeffizienten durch den Vergleich mit einem Wavelet berechnet werden können.

Eine effiziente Umsetzung der diskreten Wavelet-Transformation stammt aus dem Jahre 1988 von Mallat. Sie veränderte den Prozess der Transformation wesentlich und wurde als schnelle Wavelet-Transformation bekannt. Ursprünglich wurde ein Wavelet mit dem zu untersuchenden Ausgangssignal verglichen. Anschließend wurde mit dem skalierten Pendant wieder ein Vergleich mit demselben Ausgangssignal durchgeführt. Der schnellere Weg bei diesem Verfahren ist, auf die bereits durchgeführten Vergleiche

zurückzugreifen. Der Vorgang läuft dabei von grob nach fein. Der erste Schritt ist die Zerlegung in einen groben Verlauf und die Details. Der grobe Verlauf ergibt sich aus einer Abtastung mit der halben Auflösung, bei der ein Tiefpassfilter zum Einsatz kommt. Die Details werden mit einem Hochpassfilter gewonnen, die zusammen mit dem groben Verlauf wieder das Ausgangssignal ergeben. Danach werden die Wavelet-Koeffizienten gespeichert und der Vorgang wiederholt sich wieder bei der halben Auflösung, sodass sich die Koeffizientenanzahl bei jedem Schritt weiter verringert. Durch diese starke Minimierung der Koeffizientenberechnung wird die Berechnung wesentlich einfacher, wodurch auch der Algorithmus selbst weniger Zeit benötigt [BEL07]. Der Aspekt der schnelleren Berechnung tritt aufgrund leistungsfähiger Rechner bei eindimensionalen Datensätzen mehr in den Hintergrund. Betrachtet man aber Bilder oder andere Signale mehrerer Dimensionen, wird spätestens dann die Frage der Effizienz erneut aufgeworfen.

Aufgrund der unterschiedlichen Charakteristiken von hoch- und tieffrequenten Signalanteilen unterscheidet die Wavelet-Analyse ein Signal in einen Detail- und einen Approximationsanteil. Der niedrigfrequente Approximationsanteil A stellt die höhere zweier Skalierungen dar. Der hochfrequente Detailanteil D besitzt dagegen eine niedrige Skalierung. Abbildung 3.6 zeigt den Prozess der Aufteilung eines Signals in einen Approximations- und einen Detailanteil.

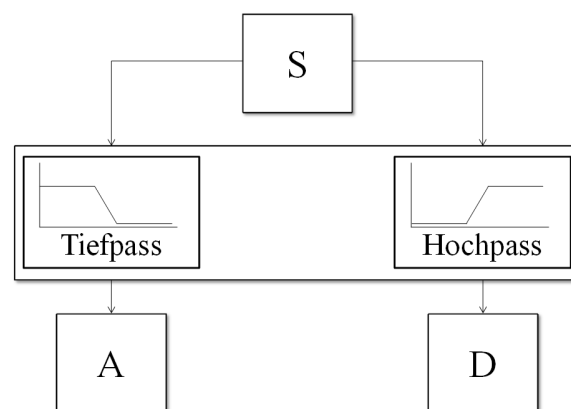


Abbildung 3.6: Aufteilung eines Signals in einen Approximations- und einen Detailanteil

Mathematisch gesehen werden Wavelet-Koeffizienten berechnet, indem über das Produkt aus skaliertem Wavelet und Signal integriert wird. In der praktischen Anwendung muss das Signal dazu mit dem angepassten Hoch- und Tiefpassfilter gefaltet werden, sodass sich daraus zwei Signale ergeben. Ein Resultat daraus wäre eine Verdoppelung der Datenmenge. Damit sich der Datensatz nach jeder Aufteilung nicht vervielfacht, wird ein Downsampling durchgeführt. Das bedeutet, dass jeder zweite Koeffizient eliminiert wird, sodass die Anzahl der Datenpunkte des Ausgangssignals mit der Summe aus Datenpunkten von Approximations- und Detailanteil annähernd übereinstimmt. Eine mögliche Abweichung von der Koeffizientenanzahl kann aufgrund der Faltung von Signal und Filter entstehen [MMOP06].

Die mehrfache Aufteilung eines Signals wird als Multiple-Level Decomposition bezeichnet. Der Prozess der Dekomposition wird iterativ wiederholt, sodass ein Signal in viele Komponenten niedrigerer Auflösung entschlüsselt wird. Das Ergebnis daraus ist ein Wavelet-Decomposition-Tree wie in Abbildung 3.7 dargestellt.

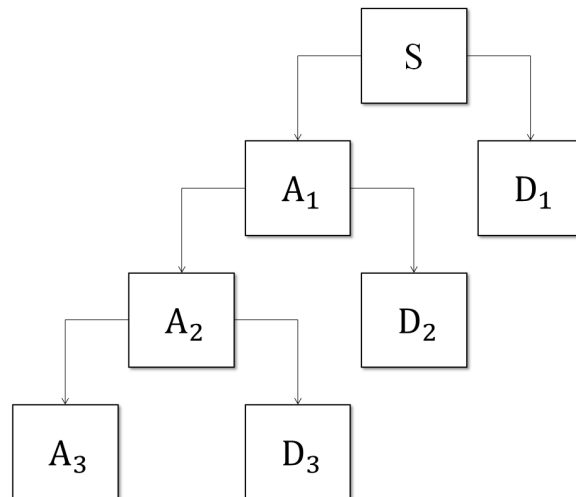


Abbildung 3.7: Decompostion-Tree

In der Grafik wird der Approximationsanteil immer einer Dekomposition unterzogen. Eine Dekomposition des Detailanteils wäre ebenfalls möglich, ist allerdings eher unüblich. Das Maximum der diskreten Aufteilung ist erreicht, wenn ein Anteil lediglich aus einem einzigen Datenpunkt besteht. In der Praxis wird das Level der Zerlegung

entsprechend dem zugrundeliegenden Signal ausgewählt.

Mit Hilfe der Wavelet-Transformation kann ein Signal analysiert und in verschiedene Bestandteile zerlegt werden. Genauso kann mit ihr aber auch das Signal wieder rekonstruiert werden. Dieser Prozess der Synthese oder auch Rekonstruktion wird mit der inversen diskreten Wavelet-Transformation durchgeführt. Wohingegen die Dekomposition aus einer Filterung und einem Downsampling besteht, vollzieht die Synthese zuerst ein Upsampling und anschließend eine Filterung. Beim Upsampling wird dazu nach jedem Datenpunkt ein zusätzlicher Datenpunkt mit dem Wert Null eingefügt, damit die zu bearbeitende Komponente auf dieselbe Stellenanzahl kommt, wie die Komponente der Ebene darüber. Anschließend können durch die Filter die Anteile zusammengefügt werden [MMOP06]. Die Beziehungen der einzelnen Approximations- und Detailanteile könnte man auch wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned} S &= A_1 + D_1 \\ &= A_2 + D_2 + D_1 \\ &= A_3 + D_3 + D_2 + D_1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Die Umsetzung einer „perfekten“ Rekonstruktion ist von dem gewählten Wavelet abhängig. Je nach den Charakteristiken eines Signals eignen sich manche Wavelets mehr oder weniger für eine Analyse. Ein anderes Wavelet bedeutet nach einer Dekomposition immer auch andere Koeffizienten. Aus diesem Grund ist deren Wahl von entscheidender Bedeutung für das Ergebnis der Transformation.

In Abbildung 3.8 wird beispielhaft der Prozess einer mehrstufigen Dekomposition und Rekonstruktion veranschaulicht. Ein gegebenes Signal mit einer Länge von 1000 Samples wird in einem ersten Schritt in einen Approximations- und Detailanteil der Länge 500 aufgeteilt. Im zweiten Schritt wird der Approximationsanteil erneut zerlegt, wodurch wieder ein Approximations- und Detailanteil, diesmal mit einer Länge von 250, entsteht. Die Linie in der Mitte der Grafik symbolisiert die Trennung der Vorgänge Dekomposition und Synthese. Des Weiteren wird die Form von jeweils zwei Hoch- und Tiefpassfilter mit ihren jeweiligen Down- oder Upsamplingstufen zusammen als

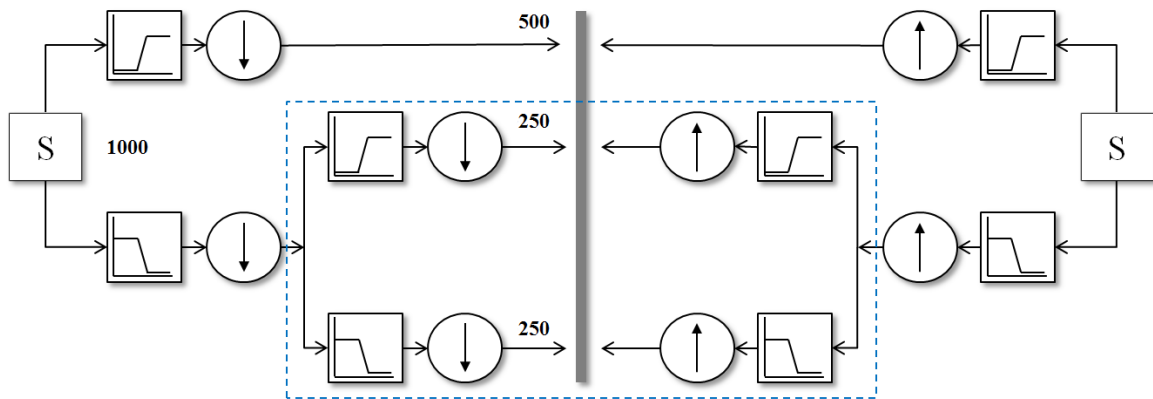


Abbildung 3.8: Dekomposition und Synthese

„Quadrature Mirror Filters“ bezeichnet [MMOP06]. Ein Beispiel dieser Form ist in der Abbildung blau umrandet.

3.5 Dünn besetzte Repräsentationen

Eine der wesentlichen Stärken der Wavelet-Transformation ist, Daten effektiv zu komprimieren, sei es um eine Datenmenge zu verringern oder um störende Signalelemente zu eliminieren. Einerseits verringert sich dadurch der Übertragungsaufwand an Informationen. Andererseits können durch das gezielte Ausschalten von bestimmten Charakteristiken des Signals bessere Ergebnisse bei der weiteren Verarbeitung dieser entstehen. Wenn ein Signal mittels nur weniger Koeffizienten repräsentiert wird, spricht man in der Nachrichtentechnik von einem dünn besetzten Signal.

Die Wavelet-Transformation bietet verschiedene Möglichkeiten ein Signal mittels dünn besetzter Repräsentationen darzustellen. Einer der entscheidenden Prozesse dabei ist die Dekomposition eines Signal. In diesem werden die Wavelet-Koeffizienten in beliebigen Stufen berechnet. Nach dieser Aufteilung bietet sich die Möglichkeit bestimmte Wavelet-Koeffizienten zu entfernen. Der Informationsgehalt des ursprünglichen Signals sinkt zwar durch diesen Vorgang, doch es gibt immer wieder äußerst kleine Koeffizienten, die nur einen geringen Beitrag zum Verlauf eines Signals leisten. Des Weiteren sind bestimmte Eigenschaften des Signals nicht immer erwünscht, sodass diese entfernt

werden. Oftmals interessiert man sich bei einem Signal nur für dessen groben Verlauf, sodass kurzfristige Änderungen des Signals für weitere Berechnungen keine Rolle spielen. Eine Möglichkeit die Koeffizientenanzahl zu verringern, wäre demnach den Detailanteil bei der Synthese des Signals aus Approximations- und Detailanteil nicht mit in diesen Prozess einfließen zu lassen. Dadurch verliert das Signal seine hochfrequenten Strukturen. Es wird nun lediglich aus den Koeffizienten des Approximationsanteils dargestellt. Der umgekehrte Fall den Detailanteil zu behalten und die Koeffizienten des Approximationsanteil zu verwerfen, ist ebenfalls möglich. Es können dabei immer genau so viele Anteile aus einem Signal entfernt werden, wie viele Aufteilungen bei der Dekomposition durchgeführt werden.

Eine weitere Möglichkeit dünn besetzte Signale zu erzeugen, ist die Verwendung von Schwellwerten. In der deutschsprachigen Literatur wird oftmals auch der englische Begriff „Thresholding“ verwendet. Mit diesen Schwellwerten lassen sich Signale entzaubern. Die Vorgänge der Wavelet-Analyse und -Synthese gestalten sich dabei wie in dem eben beschrieben Fall. Allerdings werden vollständige Approximations- oder Detailanteile nicht eliminiert, sondern es werden nur spezielle Koeffizienten entfernt, deren Anteil an dem Signal im Verhältnis zu den anderen vernachlässigbar gering ist. Sie sind daher wesentlich kleiner, sodass ihr Fehlen ein Signal nicht im besonderen Maße ändern muss. Ein gängiger Schwellwert ist beispielsweise ein fester Bruchteil des maximalen Amplitudenwerts eines Signals. Erreicht ein Koeffizient nicht diesen Wert, wird er auf Null gesetzt. Anschließend kann das Signal mit nur wenigen Repräsentationen wieder annähernd rekonstruiert werden.

Das Thresholding kann auf zwei verschiedenen Wegen durchgeführt werden. Es gibt eine harte und weiche Methode diesen Schwellwert umzusetzen. Beim harten Thresholding wird, wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, jeder Koeffizient, der unter dem Schwellwert liegt, gelöscht. Die Koeffizientenanzahl verringert sich dadurch. In der Umsetzung wird dieser daher zu Null gesetzt und fließt nicht mehr in die Signalsynthese mit ein. Der Nachteil dieses Vorgehens wird in Abbildung 3.9 deutlich. Das plötzliche auf Null setzen eines Koeffizienten verursacht Unstetigkeiten im Verlauf des

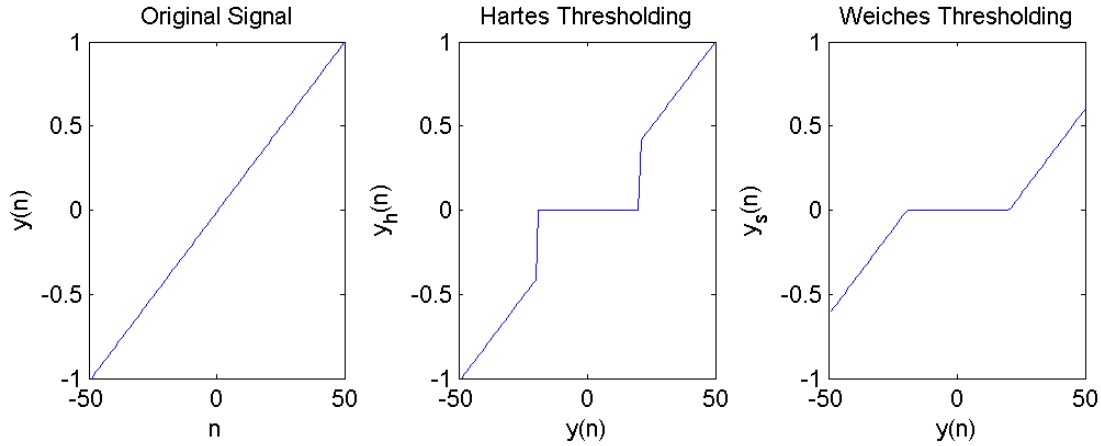


Abbildung 3.9: Hartes und weiches Thresholding

Signals, wodurch bei der Synthese Überschwinger entstehen können, die das Signal verfälschen. In der mittleren Grafik wird dies durch eine Zickzackkurve sichtbar. Eine Alternative dazu wäre das weiche Thresholding, bei dem man versucht genau dieses zu vermeiden. Durch den Schwellwert werden nicht nur niedrige Koeffizienten entfernt, sondern die anderen Koeffizienten werden ebenfalls beeinflusst und an die anderen angepasst [MMOP06]. Die Änderungen von einem Koeffizienten zum anderen sind daher weniger drastisch und verursachen einen weicheren Verlauf. Als Beispiel dazu könnte man sich eine verrauschte Funktion

$$y(n) = x(n) + w(n), \quad (3.12)$$

vorstellen bei der $x(n)$ das ungestörte Signal ist und $w(n)$ das Rauschen. Mittels eines Schwellwertes ϵ könnte eine Rauschunterdrückung durchgeführt werden, die zu den Funktionsgleichungen

$$y_h(n) = \begin{cases} y(n), & \text{für } y(n) > \epsilon \\ y(n), & \text{für } y(n) < -\epsilon \\ 0, & \text{für } |y(n)| \leq \epsilon \end{cases} \quad (3.13)$$

für die Anwendung des harten Thresholdings und zu

$$y_s(n) = \begin{cases} y(n) - \epsilon, & \text{für } y(n) > \epsilon \\ y(n) + \epsilon, & \text{für } y(n) < -\epsilon \\ 0, & \text{für } |y(n)| \leq \epsilon \end{cases} \quad (3.14)$$

für das weiche Thresholding führen. Das Signal wird dazu, wie eben beschrieben, für $|y(n)| \leq \epsilon$ auf Null gesetzt. Beim weichen Thresholding muss zusätzlich außerhalb dieses Bereichs der Schwellwert ϵ zu $y(n)$ hinzuaddiert oder von $y(n)$ abgezogen werden, um Diskontinuitäten im Signalverlauf zu vermeiden.

3.6 Variationen der Wavelet-Transformation

In den letzten 30 Jahren des Bestehens der Wavelet-Transformation sind zu dem ersten Wavelet von Haar eine ganze Reihe weiterer Wavelets hinzugekommen. Sie haben teilweise recht unterschiedliche Auswirkungen auf ein Signal, weshalb deren Wahl bei der Transformation nicht zu vernachlässigen ist. Einige dieser sind daher nachfolgend erwähnt. Darüber hinaus gibt es mittlerweile eine ganze Reihe von Anwendungen, die auf Wavelets zurückgreifen. Das Spektrum reicht dabei beispielsweise von der Kompression von Bildern über die Beobachtung von Unregelmäßigkeiten der menschlichen Herztätigkeit bis hin zu Qualitätskontrollen von Stoffen der Textilindustrie.

3.6.1 Wavelet-Familien

Eine Gruppe von Wavelets, zu denen auch das Haar-Wavelet zählt, sind die orthogonalen Wavelets. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Funktionen ψ eine orthonormale Basis im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ bilden, wodurch die Berechnung der Koeffizienten relativ einfach wird. Das Haar-Wavelet besitzt darüber hinaus noch die Eigenschaft eines kompakten Trägers. Der Träger einer Funktion f ist die Menge der für t mit $f(t) \neq 0$. Das Haar-Wavelet ist damit allerdings nicht stetig und demzufolge nicht differenzier-

bar [LMR98]. Ein weiteres wichtiges orthogonales Wavelet ist das von Meyer. Es weist eine gewisse Glattheit auf und kann daher unendlich oft differenziert werden. Damit steht es aber nur für die kontinuierliche Wavelet-Transformation zur Verfügung. Für praktische Anwendungen werden vor allem Wavelets gesucht, die beide Eigenschaften besitzen. Die Multiskalenanalyse aus Kapitel 3.3 stellt dabei ein wesentliches Hilfsmittel dar, wenn es um die Konstruktion von Wavelets geht. Die belgische Mathematikerin Ingrid Daubechies entwickelte dazu eine Reihe orthogonaler Wavelets, die besonders zu dem Erfolg der Wavelets auf den unterschiedlichsten Anwendungsgebieten führte. Diese Wavelets sind nachfolgend abgebildet.

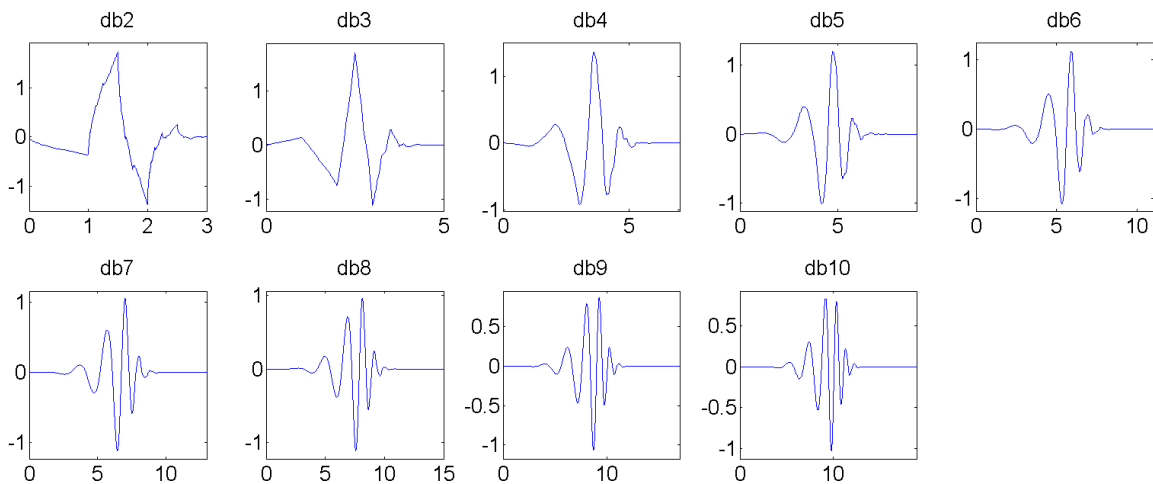


Abbildung 3.10: Daubechies Wavelets 2 bis 10

Zusammen mit Albert Cohen und Jean-Christophe Feauveau schuf Daubechies 1992 eine weitere Gruppe von Wavelets, die biorthogonalen Wavelets [CDF92]. Diese sind in ihrer Form symmetrisch und linearphasig. Allerdings ist die Orthogonalität durch die Symmetrie nicht mehr vollständig zu erhalten. Die Linearphasigkeit ist besonders für die Rekonstruktion von Signalen und Bildern von Nöten. Die Familien der Symlets und der Coiflets sind weitere Gruppen von Wavelets, die sich aufgrund ihrer Symmetrie auszeichnen und deshalb besonders häufig eingesetzt werden.

3.6.2 Anwendungsbereiche

Die Wavelet-Transformation ist ein Verfahren, das in vielen verschiedenen Bereichen Verwendung findet. Die Signalverarbeitung ist eines ihrer wichtigsten Aktionsgebiete. Es geht um das Extrahieren oder Komprimieren von spezifischen Informationen, das Erkennen von bestimmten Mustern, periodischen Anteilen oder Unregelmäßigkeiten. Die Wavelet-Transformation ersetzt keineswegs die Fourier-Analyse. Sie stellt sich vielmehr als eine wichtige Erweiterung dar. Sie erweist sich vor allem immer dann als nützlich, wenn ein Signal Kanten, Sprünge oder zeitlich variierende Charakteristiken aufweist. Im Bereich der Bildverarbeitung wurde der Gedanke einer Multiskalenanalyse bereits 1983 in Form des Pyramiden-Algorithmus eingesetzt.

Ein besonderer Schwerpunkt der Wavelet-Transformation liegt in der Kompression von digitalen Bildern. Dabei wird der Aspekt Signale mit nur wenigen Koeffizienten abzubilden (wie in Kapitel 3.5 beschrieben) aufgegriffen. Einerseits kann dadurch der Speicherbedarf minimiert werden und andererseits sinken für eine Übertragung von Bildern die benötigten Übertragungskapazitäten [LMR98]. Des Weiteren können Wavelets zur Entrauschung eines Signals oder Bildes beitragen, indem mit dem Thresholding Schwellwerte gesetzt werden und minimale Änderungen, die zum Beispiel durch ein Rauschen hervorgerufen werden, eliminiert werden.

In der Medizintechnik wird die Wavelet-Transformation beispielsweise in der Analyse des Elektrokardiogramms verwendet, um Unregelmäßigkeiten der Herzrhythmus festzustellen. Die Kontraktionen des großen Herzmuskels führen dabei zu besonders großen Signalspitzen. Die Bewegungen der Herzklappen verschwinden dagegen fast im Signalausrauschen. Wichtig für die Medizin ist, ob der Rhythmus der Herzklappen synchron zu dem des Hauptmuskels ist und ob dieser sich zwischen den Herzschlägen wieder entspannt.

Die produzierende Industrie nutzt Wavelets, um Qualitätsbeurteilungen von Geweben durchzuführen. Untersucht wird beispielsweise, ob die Fasern eines Stoffes korrekt verwebt wurden. Oftmals verkleben Fasern miteinander oder es kommt zu unre-

gelmäßigen Anhäufungen dieser. Große und kleine Gewebefehler können hierbei, wie unterschiedliche Maße auf einer Skala, betrachtet und dementsprechend ausgewertet werden [LMR98]. Darüber hinaus gibt es noch eine ganze Reihe weiterer Bereiche, in denen die Wavelet-Transformation verwendet wird. Einer dieser ist der Finanzmarkt, der im Fokus der vorliegenden Arbeit liegt.

Kapitel 4

Ansätze der Zeitreihen- und Portfoliomodellierung mit Wavelets

Die Theorie der Wavelets wird seit mittlerweile gut drei Jahrzehnten intensiv untersucht und weiterentwickelt. Es ist daher nicht ungewöhnlich, dass nach dem Überwinden der Barriere von rein theoretischen Modellen hin zu praktischen Anwendungen die Wavelet-Analyse eine weite Verbreitung zu verzeichnen hat, die im vorhergehenden Kapitel mit einigen Beispielen veranschaulicht wurde. Einer dieser Anwendungsfälle ist die Analyse von Finanztiteln und deren Preisentwicklungen auf den weltweiten Finanzmärkten. Ein hohes Maß an Angebot und Nachfrage führt zu ständigen Veränderungen der Preise, weshalb diese Entwicklungen nicht selten als Irrfahrten bezeichnet werden. Die Bewertung eines Finanztitels, wie die einer Aktie sowie die Bestimmung seines zukünftigen Wertes, sind daher für Anleger umso wichtiger. Außerdem halten diese selten nur ein Wertpapier, wodurch die Notwendigkeit eines angemessenen Portfoliomanagements deutlich wird.

4.1 Wavelets und die Portfoliotheorie

Im Folgenden sollen einige Beispiele dafür gegeben werden, wie die Portfoliotheorie in jüngerer Zeit mit den verschiedensten Techniken verknüpft wurde, um höhere Renditen

an den Finanzmärkten zu erzielen. Darüber hinaus ist besonders der Anteil der Wavelet-Transformation an der Optimierung interessant. Die wichtigsten Arbeiten zu dieser Thematik sollen hier herangezogen werden, damit die vorliegende Untersuchung auf dem aktuellen Stand der Technik aufbauen kann.

4.1.1 Beispiele der Portfoliooptimierung

Die Portfoliotheorie ist ein Themenkomplex der den Wirtschaftswissenschaften entstammt und von ihr weiterentwickelt wird. Doch es gibt auch Ansätze aus anderen Bereichen wie der Mathematik und der Informationstechnik, die sich mit dem optimieren von Investmentportfolios beschäftigen. Eine Methode Portfolios zu analysieren ist beispielsweise diese in Unterräume zu unterteilen, die eine niedrigere Komplexität aufweisen, um so eine einfachere Bewertung vornehmen zu können. Die Dekomposition in Unterräume ermöglicht dabei, einen dreidimensionalen Raum eines Portfolios mit drei Bestandteilen in einen zweidimensionalen Raum eines marktneutralen Portfolios und einen dazu orthogonalen eindimensionalen Raum mit dem Marktrisiko zu zerlegen. Bei einer Anzahl von N Titeln ergibt sich für das marktneutrale Portfolio ein Unterraum von $N - 1$ Dimension. Die Rendite des marktneutralen Portfolios hängt damit nur noch von den Renditen der einzelnen Portfoliotitel ab. Deren Renditeanteil, der sich durch den Markt ergibt, wird damit extrahiert, wodurch einzelne Wertpapierrenditen unabhängig vom Markt modelliert werden können [Gan11].

Einige Untersuchungen konzentrieren sich verstärkt auf die Komponente des Risikos. Markowitz führte das Risiko als die Varianz beziehungsweise Standardabweichung der Portfoliorendite ein (siehe 2.2). Durch ein gezieltes Risikomanagement könnte nach deren Ergebnissen die Anlagerendite erhöht werden. Empirische Studien lassen vermuten, dass die Korrelationen von Risiken verschiedener Portfoliobestandteile über die Zeit mit einer Art Grundrauschen versehen sind, das man zu entfernen versucht, bevor weitere Berechnungen mit den Risikowerten durchgeführt werden. Eine Risikoanalyse mit verschiedenen Verfahren der Filterung erfährt daher eine verstärkte Aufmerksam-

keit bei der Optimierung von Portfoliozusammensetzungen [TAA11].

Des Weiteren gibt es Untersuchungen [Wan10] [LFB06] bezüglich der Anzahl der Assets im Portfolio. Ein effizient diversifiziertes Portfolio führt schnell zu einer hohen Anzahl an Wertpapieren. Aufgrund des regelmäßigen Kaufs und Verkaufs durch eine sich ständig verändernde Gewichtung der Portfoliobestandteile können die Gewichte zu klein werden. Dadurch wird die Wirtschaftlichkeit des Portfolios in Frage gestellt. Jede Transaktion ist mit Kosten verbunden, die zu Lasten der Rendite geht. Die Anzahl der Wertpapiere im Portfolio ist daher auf ein bestimmtes Maß zu beschränken. Bei der Auswahl oder Modellierung von Portfoliotiteln werden in der jüngeren Zeit auch immer wieder Fuzzy-Systeme miteinbezogen [Fas08] [Leu11] [Zha08]. Die Verbindung von technischen Komponenten mit Wertpapierportfolios ist daher aktueller denn je. Insgesamt kann man sagen, dass es eine Vielzahl von Bestrebungen gibt, ein Portfolio mit zusätzlichen Methoden zu verbessern.

4.1.2 Portfoliooptimierung mit Wavelets

Die Verwendung von Wavelets zur Analyse und Bewertung von Aktienportfolios stellt ein neues Kapitel in der Portfoliotheorie und seiner Erweiterungen dar. Die Wavelet-Transformation wird im Bereich der Finanzwirtschaft in zahlreichen Modellen eingesetzt. Doch wenn es um die Optimierung von Portfolios geht, halten sich die Kenntnisse darüber in Grenzen.

In einer Arbeit [MOG09] der Universität Barcelona wurden Wavelets in Kombination mit einem Portfolio eingesetzt. Es geht in dieser um Kreditportfolios von Banken, die mit Aktienportfolios nicht zu vergleichen sind. Jedoch könnte man seitens der Bank einen Kreditnehmer zumindest im weiteren Sinne als eine Investition betrachten, der der Bank letztlich mit der Rückzahlung eine Rendite beschert. Außerdem wird die Wavelet-Transformation in dieser nicht zur Auswahl der Portfoliobestandteile herangezogen sondern zur Berechnung des Value at Risk (VaR) des Kreditportfolios. Der VaR, oder auch Wert im Risiko, ist ein Risikomaß für den Wert eines Verlusts, der

mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit in einem bestimmten Zeitraum nicht überschritten wird. Ein VaR von 1 Mio. € über einen Zeitraum von einem Jahr bei einem Konfidenzniveau von 95 % bedeutet, dass der Verlust von 1 Mio. € mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % in einem Jahr nicht überschritten wird. Das Risikomaß des VaR wird auch des Öfteren für Wertpapierportfolios bestimmt. Dadurch haben Investoren eine gewisse Sicherheit, dass ihre Kapitalanlagen eine bestimmte Verlustgrenze mit einer hohen Wahrscheinlichkeit nicht überschreiten. Es bestehen darüber hinaus auch Arbeiten [KPU01] zur Optimierung von Portfolios mit Hilfe des VaR beziehungsweise dessen bedingter Variante des Conditional Value at Risk.

Eine der wichtigsten Untersuchungen, auf der diese Arbeit aufbaut, stammt von der französischen Université de la Méditerranée aus dem Jahr 2011 [RB11]. In dieser werden die Auswirkungen von verschiedenen Zeitskalen auf das Marktrisiko von Aktien betrachtet. Der Gedanke dahinter ist, dass es am Markt eine Vielzahl von Akteuren gibt, die sich in ihrem Verhalten bezüglich der Häufigkeit des Handelns unterscheiden. Für die Zeitskalenanalyse wird die stationäre Wavelet-Transformation, auch als Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform bekannt, verwendet, die im Gegensatz zur DWT verschiebungsinvariant ist. Hierbei kommt das Daubechies-Wavelet db4 der Filterlänge 8 zum Einsatz (siehe Abbildung 3.10). Des Weiteren findet eine Portfolio-konstruktion aus Aktien der Pariser Börse mit Hilfe des VaR statt. Durch eine gezielte Auswahl von Titeln kann daher der mögliche Verlust in einer Periode bei einer gegebenen Wahrscheinlichkeit minimiert werden.

Die Multiskalenanalyse mit Wavelets wird noch in zwei weiteren Arbeiten [GSW05] [CCR08] zur Portfoliooptimierung eingesetzt. Beide konzentrieren sich wieder auf die Risiken einzelner Aktien und das Marktrisiko, welche zerlegt und auf verschiedene Skalen verteilt werden. Um eine Gewichtung von Aktien im Portfolio vorzunehmen, wird dabei der Betafaktor β , also das Verhältnis von Aktienrisiko zum Marktrisiko (siehe Kapitel 2.3), verwendet. Eine Studie von Masih et al. [MAAT10] greift den Betafaktor in Verbindung mit Multiskalen noch einmal auf. Die meisten Arbeiten [GSW01] [RUZ94] konzentrieren sich allerdings mehr darauf, Wavelets zur Analyse einzelner Wertpapiere

oder Indizes zu verwenden. Zum Teil werden auch Vorhersagen für zukünftige Verläufe von finanziellen Zeitreihen getroffen [ZC01].

4.2 Finanzielle Zeitreihen

Auch wenn die meisten Arbeiten über Wavelets sich eher auf die Analyse von einzelnen Zeitreihen konzentrieren, so sind deren Erkenntnisse für die Bewertung von Portfolios doch von Bedeutung. Schließlich ist ein Portfolio eine Zusammensetzung aus eben diesen Zeitreihen. Von daher kann die Portfoliorendite nur so gut sein, wie es die enthaltenen Bestandteile zulassen. Aus diesem Grund ist es notwendig, sich mit den Zeitreihen der Finanzmathematik genauer auseinanderzusetzen, deren Eigenschaften zu extrahieren und Möglichkeiten zu untersuchen, bestehende Reihen mit verschiedenen Methoden fortzuführen.

4.2.1 Grundlagen

Die Zeitreihenanalyse beschäftigt sich mit der Untersuchung von zeitabhängigen Folgen von Datenpunkten und versucht anhand von Modellen deren zukünftigen Verlauf vorherzusagen. Die Ökonometrie arbeitet dabei mit Zeitreihenmodellen, denen Daten wirtschaftlicher Natur zu Grunde liegen. Zum einen wird versucht eine Zeitreihe möglichst gut mit einem Modell zu beschreiben. Zum anderen interessiert man sich für die Fähigkeiten eines solchen, nachfolgende Verläufe abzubilden und für die Vorteile, die sich daraus für Marktteilnehmer ergeben.

Ein wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist der stochastische Prozess X . Zu einem Zeitpunkt t ist dieser eine Zufallsvariable X_t mit einer bestimmten Verteilungsfunktion. Bei einem gegebenen ω ist $X(\omega)$ eine Realisierung oder ein Pfad des Prozesses X . Ist seine Verteilungsfunktion bekannt, so ist der Prozess eindeutig bestimmt. Darüber hinaus sind die Autokovarianzfunktion, die Autokorrelationsfunktion und der Begriff der Irrfahrt von Wichtigkeit. Die Autokovarianzfunktion eines stochastischen

Prozesses ist durch

$$\gamma(t, \tau) = E[(X_t - \mu_t)(X_{t-\tau} - \mu_{t-\tau})] \quad (4.1)$$

definiert. Sie beschreibt die Kovarianz zwischen zwei Werten des Prozesses zu den Zeitpunkten t und $t + \tau$. $E[\dots]$ ist der Erwartungswert des Ausdrucks 4.1 und μ_t ist der Erwartungswert von X zum Zeitpunkt t . Bei $\tau = 0$ sind die Zeitpunkte identisch. Es liegt keine Zeitdifferenz vor. In diesem Fall ist die Autokovarianz γ die Varianz von X_t . Die statistische Autokorrelationsfunktion des stochastischen Prozesses ist dabei die auf das Intervall $[-1,1]$ normierte Autokovarianzfunktion. Nach [FHH01] entspricht ein stochastischer Prozess bei einem Erwartungswert von Null weißem Rauschen sofern gilt

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \sigma^2 & \text{für } \tau = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.2)$$

Als letztes haben wir mit der Irrfahrt einen stochastischen Prozess X_t , der vorliegt sobald sich X_t mit einer Konstanten ν , einer zeitlich verschobenen Version seiner selbst und weißem Rauschen ϵ_t durch

$$X_t = \nu + X_{t-1} + \epsilon_t \quad (4.3)$$

repräsentieren lässt. Bei einem ν ungleich Null spricht man von einem Prozess mit Drift. Die Irrfahrt ist eine zufällige Bewegung von Verläufen, die in der Literatur auch als Random Walk bezeichnet wird. Sie ist besonders aus historischer Sicht interessant, denn sie war das erste stochastische Modell für die Darstellung der Kursverläufe von Aktien [FHH01].

4.2.2 ARMA-Modelle

Die ARMA-Modelle sind die klassischen Modelle der Zeitreihenanalyse. ARMA steht für Autoregressive-Moving Average. Sie sind stationäre stochastische Prozesse, die sich wiederum aus zwei Prozessen zusammensetzen. Ein autoregressiver Prozess der Ord-

nung p oder auch AR(p)-Prozess ist ein stochastischer Prozess X_t , welcher durch

$$X_t = \nu + \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \epsilon_t \quad (4.4)$$

$$= \nu + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \epsilon_t \quad (4.5)$$

definiert ist. Der Prozess bezieht sich daher auf sich selbst zu einem vorhergehenden Zeitpunkt. α symbolisiert dabei die Parameter, ν ist eine zusätzliche Konstante und ϵ_t ist ein Rauschterm des Prozesses. Regressionsmodelle werden besonders häufig in der Ökonometrie eingesetzt, da meist mehrere Zeitreihen miteinander in Verbindung gebracht werden müssen.

Ein Moving-Average-Prozess der Ordnung q oder MA(q) ist definiert durch

$$X_t = \beta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t \quad (4.6)$$

$$= \sum_{j=1}^q \beta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t \quad (4.7)$$

Hierbei handelt es sich um einen Prozess, der abhängig von Störtermen früherer Perioden ist [WP97]. Außerdem ist er stationär, weil er selbst aus einer Kombination stationärer Prozesse besteht. Mit β werden seine Parameter bezeichnet und ϵ_t sind zeitlich verschobene Anteile weißen Rauschens.

Ein autoregressiver Prozess und ein Moving-Average-Prozess zusammen bilden das ARMA-Modell, kurz ARMA(p,q), welches nun wie folgt gebildet werden kann.

$$X_t = \nu + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t \quad (4.8)$$

Um einen Prozess durch ein ARMA-Modell darzustellen, müssen die Parameter der Gleichung 4.8 geschätzt werden. Dies kann mit Hilfe der Gleichungen von George U. Yule und Gilbert Walker erfolgen. Dabei kann durch einen Vergleich der empirischen Autokorrelation mit der theoretischen Autokorrelationsfolge des Modells eine Beziehung zwischen beiden hergestellt werden [Neu04].

4.2.3 Zeitreihen stochastischer Volatilität

Bei der Beobachtung der Finanzmärkte hat man festgestellt, dass die Kursverläufe von Finanztiteln über die Zeit unterschiedliche Volatilitäten aufweisen. Auf eine Reihe hoher Kursschwankungen folgen unmittelbar ebenfalls hohe Schwankungen. Doch nach dieser Phase starker Ausschläge zeichnen sich schwächere Schwankungen ab, denen weitere dieser Art folgen, bis schließlich wieder eine Phase mit einer anderen Schwankungsbreite einsetzt. Die Volatilität ist daher nicht gleich verteilt. Sie tritt in Clustern auf, die mal ruhigere und mal hektischere Kursverläufe darstellen.

In Abbildung 4.1 ist beispielhaft die Aktie der deutschen Bank von Dezember 2009 bis November 2013 dargestellt. Das erste Diagramm zeigt den Kursverlauf der Aktie über diesen Zeitraum. Ausgehend von den täglichen Preisen der Aktie lässt sich die

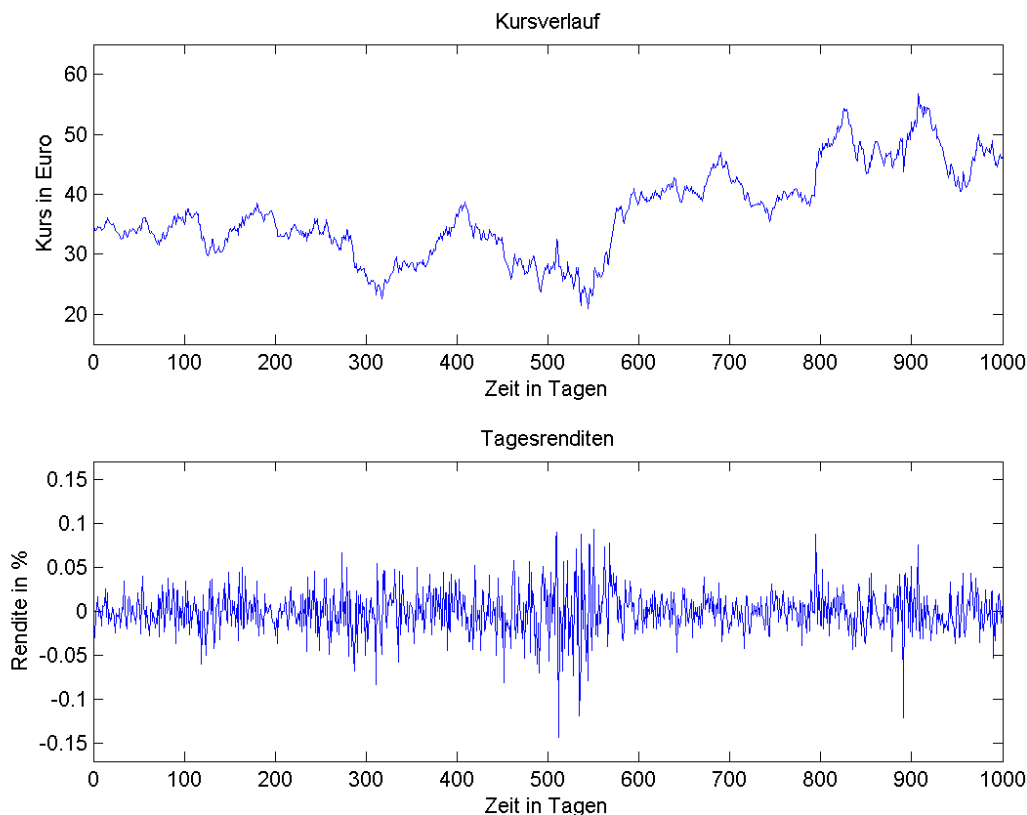


Abbildung 4.1: Aktie der deutschen Bank von Dezember 2009 bis November 2013

Kurssteigerung von einem Tag zum anderen berechnen. Das zweite Diagramm zeigt die Tagesrenditen der Aktie im selben Zeitraum. Es wird deutlich, dass über die 1000 Handelstage ganz unterschiedliche Volatilitäten auftreten.

Die Volatilität ist eine wichtige Charakteristik der finanzieller Zeitreihen. Besonders für Kreditinstitute ist eine gute Schätzung und Prognose dieser von Interesse, da sie gleichzeitig als Risikomaß für eine Investition dient. So wird beispielsweise die Risikoprämie oftmals als Funktion der Volatilität berechnet. In den 1980er Jahren führte Robert Eagle mit dem ARCH-Modellen erstmals ein Modell ein, das in der Lage war, diese Eigenschaft der in Clustern auftretenden Volatilitäten von Zeitreihen abzubilden. ARCH bedeutet Autoregressive Conditional Heteroscedasticity oder auf Deutsch autoregressive bedingte Heteroskedastizität. Durch diese zeichnete sich eine

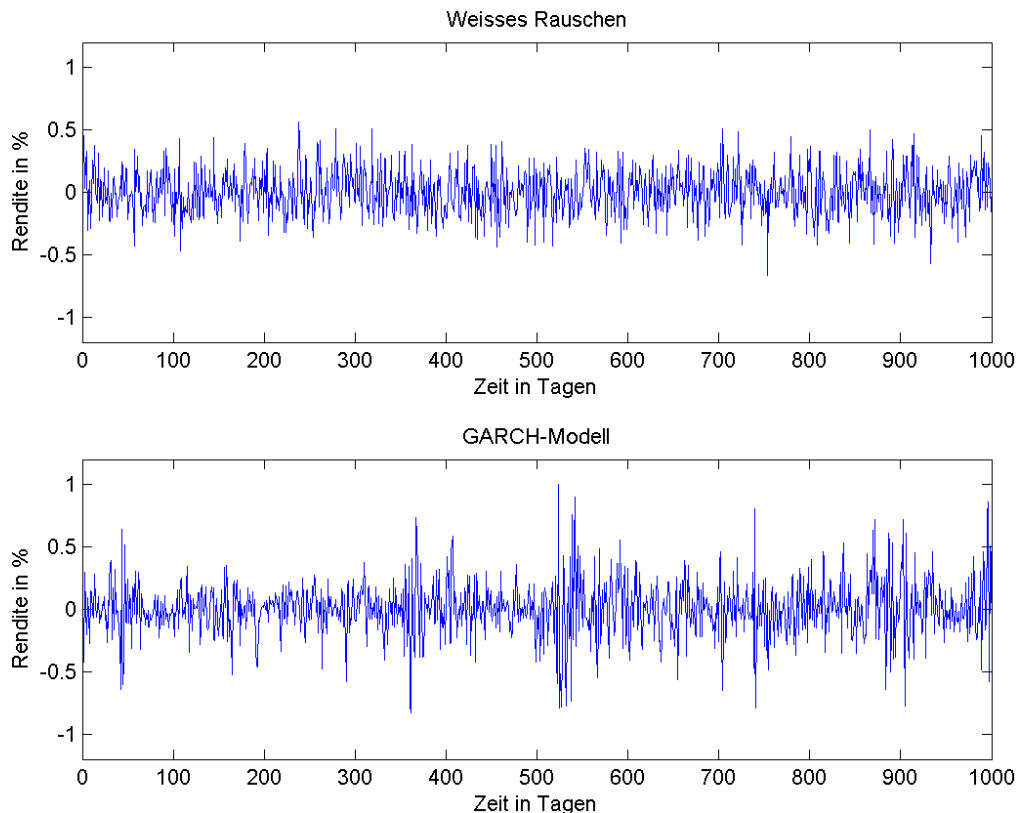


Abbildung 4.2: Weißes Rauschen versus GARCH-Modell

enorme Veränderung innerhalb der Finanzökonomie ab, da sich aus ihnen völlig neue Möglichkeiten der Simulation von Zeitreihen ergaben. Nun konnten Asymmetrien und kurzfristige Schocks modelliert werden. [FHH01]

In Abbildung 4.2 werden zwei Zeitreihen simuliert, die die Gewinne und Verluste eines fiktiven Finanztitels über einen Zeitraum von 1000 Zeiteinheiten abbilden. Der erste Prozess basiert auf einem normalverteilten weißen Rauschen. Der zweite Prozess wurde mit einem GARCH(1,1)-Modell erstellt. Ein GARCH-Modell ist ein generalisiertes ARCH-Modell. GARCH steht daher für Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Vergleicht man die Renditen der deutschen Bank Aktie (Abbildung 4.1) mit den beiden Modellen (Abbildungen 4.2), so erkennt man, dass das ARCH-Modell den Renditeverlauf deutlich realistischer abbildet, als der des weißen Rauschens.

Ein ARCH-Prozess wird unter der Bedingung $E[\epsilon] = 0$ durch die Gleichung

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \epsilon_{t-p}^2 \quad (4.9)$$

$$= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (4.10)$$

beschrieben. ϵ_t ist daher im Mittel Null. ω ist eine Konstante und α beschreibt die Parameter des Prozesses, die geschätzt werden müssen. Dafür werden in der Regel Maximum-Likelihood-Schätzer verwendet. Erweitert man das bestehende Modell um autoregressive Terme der Volatilität, gelangt man zur generalisierten autoregressiven bedingten Heteroskedastizität, kurz als GARCH bezeichnet. Ein GARCH(p,q)-Prozess stellt sich wie folgt dar:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4.11)$$

Das ARCH-Modell wurde um die Parameter β ergänzt, die an die Volatilität σ^2 der Vorperioden gebunden sind. Mit den Variablen p und q wird die Charakteristik des Prozesses beschrieben. Während p die Ordnung der ARCH-Komponente bestimmt, zeigt q die Ordnung des autoregressiven Anteils. Mittlerweile gibt es eine ganze Reihe an Erweiterungen, wie beispielsweise das Exponential-GARCH- oder das Threshold-ARCH-

Modell, die auf dem Konzept der Heteroskedastizität aufbauen. Die ARCH-Modelle sind aufgrund ihrer Fähigkeiten Zeitreihen zu beschreiben fester Bestandteil der Ökonometrie geworden. Zum einen geht es darum, die Theorie des Modells empirisch zu bestätigen. Zum anderen werden zukünftige Schwankungen mit ihnen prognostiziert, sodass Handlungsempfehlungen für Anleger abgeleitet werden können.

Kapitel 5

Analyse und Konzeptionierung eines Modells

Die Portfoliotheorie bildet die Grundlage für die Kapitalanlage von zahlreichen Investoren und Institutionen an den Finanzmärkten. Wenn es auch eine Vielzahl von möglichen Anlagestrategien gibt, so nehmen Anleger doch immer wieder eine breite Streuung ihres Kapitals vor. Das Prinzip der Diversifikation gehört wie bereits erörtert zu den wichtigsten Regeln der Asset Allocation überhaupt. Es ist daher nicht verwunderlich, dass sich viele Strategien an diesem Prinzip orientieren. Folglich kann bei der Analyse und Bewertung eines Portfolios dieser Aspekt nicht fehlen.

Mit dem CAPM gelang es Sharpe, die bestehende Portfoliotheorie zu erweitern und ein Optimum innerhalb der Menge effizienter Portfolios auszumachen. Während das APT einige Schwierigkeiten der Umsetzung mit sich bringt, ist das CAPM relativ leicht aus vergangenen Kursverläufen und einem risikofreien Zinssatz zu realisieren. Dadurch bietet sich außerdem die Möglichkeit eines automatisierten Handels. Das Verwenden eines Algorithmus, der einem die eigene Entscheidung über den Kauf von Wertpapieren abnimmt, ist bei den institutionellen Anlegern längst Stand der Technik, was man am Beispiel des Hochfrequenzhandels sehen kann [Ald13]. Das CAPM soll daher auch in dieser Arbeit Ausgangspunkt für den Einsatz von Wavelets sein.

5.1 Möglichkeiten einer alternativen Modellrendite

Wie bereits festgestellt, sind die zentralen Größen der Portfoliotheorie die erwartete Rendite und das Risiko. Aus diesen und den Wertpapierkorrelationen wird ein Portfolio konzipiert. Wenn man nun ein besseres Ergebnis als das CAPM erzielen, aber gleichzeitig dessen Prinzipien beherzigen will, so muss eine Optimierung an den Eingabedaten erfolgen. Das kann zum einen geschehen, indem man beispielsweise den zukünftigen Wert eines Wertpapiers und damit dessen Rendite kennt. Wenn auch der Blick in die Zukunft nicht möglich ist, so kann zumindest ein Informationsvorteil in Form einer Prognose über die gehandelten Aktien von Vorteil sein. In Kapitel 4.1.2 wurde bereits auf einige Arbeiten hingewiesen, die sich unter Verwendung einer Multiskalenanalyse mit der Komponente des Risikos auseinandersetzen, um so eine alternative Strukturierung vorzunehmen. Ein allgemeines Portfolio im Sinne des CAPM kann daher mit einem eben solchen geschlagen werden, wenn die Daten der Rendite und des Risikos so bearbeitet werden, dass sie einen positiven Effekt auf die Portfoliostrukturierung haben.

Markowitz definierte die erwartete Rendite eines Portfolios aus den einzelnen Renditen seiner Assets und deren Gewichtung im Portfolio (siehe Gleichung 2.1). Die erwartete Rendite eines einzelnen Wertpapiers errechnet sich wiederum aus dem möglichen Kurssteigerungspotential, den dieses in einem bestimmten Zeitraum im Mittel aufweist. Bei einer Betrachtungsdauer von einem Jahr würde sich demgemäß die monatliche Kurssteigerung aus dem Durchschnitt der zwölf Kursveränderungen des Jahres ergeben.

Abbildung 5.1 zeigt beispielhaft die Berechnung der erwarteten Rendite eines einzelnen Wertpapiers. Die Gerade *a* symbolisiert hier die Preisänderung einer Aktie in einem Zeitraum von einem Jahr, wobei nur die Tage in Betracht gezogen, werden an denen an den Börsen auch gehandelt wird. Die monatliche Kurssteigerung liegt hier im Durchschnitt bei ca. 2,4 %. In der Abbildung ist in rot der Graph eines weiteren Monats eingezeichnet. Bezieht man diesen Monat ebenfalls mit in die Berechnung ein (siehe Gerade *b*), so sinkt der monatliche Erwartungswert auf nur noch 1,7 %. Würde

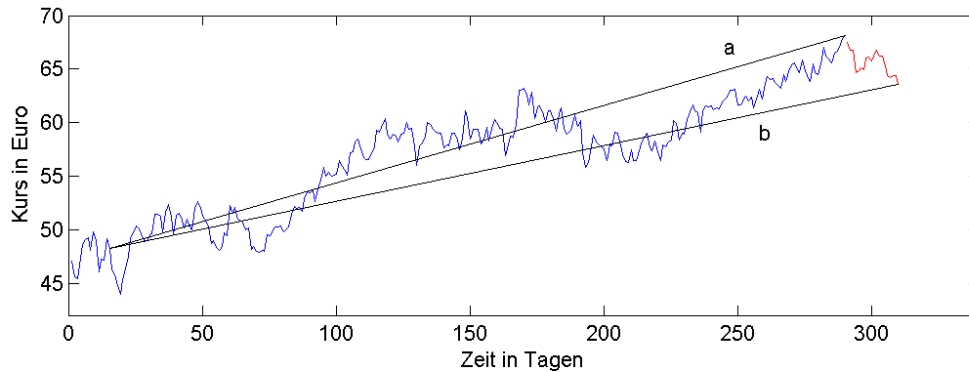


Abbildung 5.1: Renditeberechnung aus rein historischen Werten und aus Werten mit einer zusätzlichen Vorhersage

man diese Preisänderungen vorhersagen können, wäre die Entscheidung für die Aktie beziehungsweise deren Gewichtung im Portfolio eine ganz andere.

Ein weiteres Beispiel für eine sich anders ergebende Portfoliozusammensetzung aufgrund der erwarteten Rendite zeigt Abbildung 5.2. Wie im vorherigen Beispiel wird der Mittelwert der monatlichen Zunahme über einen Zeitraum von ungefähr einem Jahr bestimmt. Je nachdem ob sich der Chart vor einem Jahr in einem Hoch oder Tief befand, so wird das Ergebnis der erwarteten Rendite ein anderes sein. Während der Zeitraum der Gerade *a* zu einem Wert von monatlich 3,3 % führen würde, so hätte

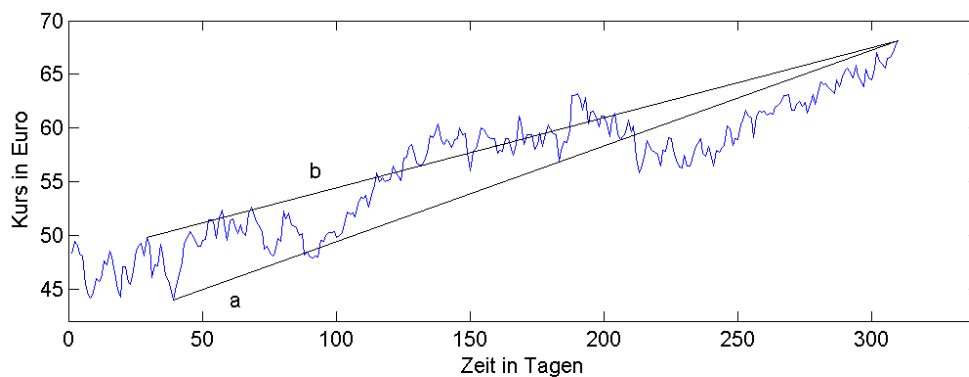


Abbildung 5.2: Zwei Pfade der Renditeberechnung

man in ungefähr derselben Zeit, wenn sich der Kurs bei einem Hoch befunden hätte, ein Ergebnis von 2.6 %.

5.2 Realisierungsoptionen

Die Wavelet-Transformation ist ein mächtiges Tool zur Analyse und Bearbeitung von Signalen. Damit aus ihrer Anwendung ein Mehrwert für die Strukturierung eines Portfolios entsteht, werden nachfolgend einige Überlegungen angestellt. Darunter wird auch der Einsatz von stochastischen Prozessen diskutiert.

5.2.1 Simulation zukünftiger Kursverläufe

In Kapitel 5.1 wurde mit einem Beispiel gezeigt, welchen Vorteil man aus einer Vorhersage für ein Portfolio erzielen kann, die zumindest annähernd eine Tendenz des weiteren Verlaufs andeutet. Daher wird eine Methode benötigt, die das gegebene Signal abbildet und anschließend mit dessen Charakteristiken fortführt. Mit den Modellen der Ökonometrie bieten sich der Umsetzung dieser Problematik einige Möglichkeiten. Ein ARMA-Modell kann einen Prozess mit dem Trend eines ursprünglichen Signals fortsetzen. Mit einem GARCH-Modell besteht darüber hinaus die Möglichkeit, die sich verändernde Volatilität der vergangenen Perioden auf zukünftige Bereiche zu übertragen.

In Abbildung 5.3 ist ein beliebiger Aktienchart abgebildet, von dem die mittlere Steigung berechnet wird, genauso wie in der Portfoliotheorie und den ARMA-Modellen. Mit diesen kann eine Vorhersage über den weiteren Verlauf des Preises erfolgen, was durch die rote Gerade dargestellt wird. Da sich die Rendite der Vorhersage mit der der Portfoliotheorie deckt, kann aus ihr allein kein Mehrwert generiert werden. Darüber hinaus geht die bisherige Signalcharakteristik verloren.

Ein stochastischer Prozess, konstruiert aus einem ARMA- oder GARCH-Modell, kann im eigentlichen Sinne nicht berechnet werden. Er muss aufgrund seiner Rauschkomponenten simuliert werden (siehe ϵ beispielsweise in Gleichung 4.8 oder 4.11). Eine gängige Methode in den Wirtschaftswissenschaften ist die Monte-Carlo-Simulation.

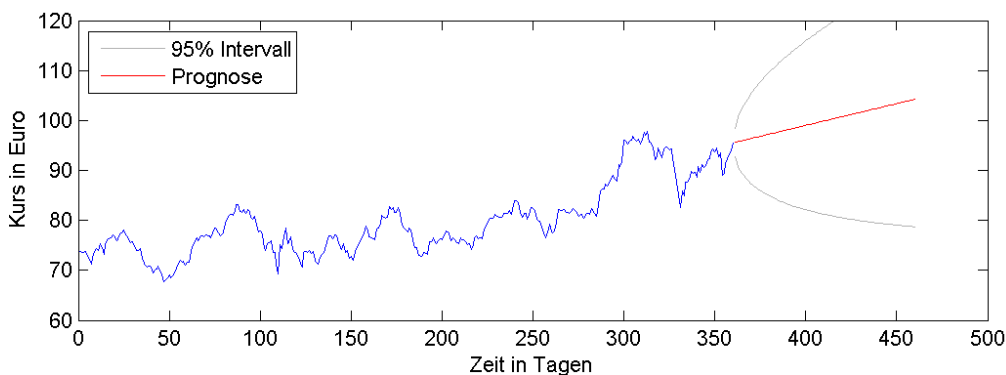


Abbildung 5.3: Bestimmen des weiteren Trends

Sie ist ein numerisches Verfahren der Stochastik, welches sich das Gesetz der großen Zahlen zu Nutze macht. Mit einer hohen Anzahl an Pseudozufallszahlen wird ein Experiment durchgeführt und dessen Ergebnisse statistisch ausgewertet. Dadurch können Modelle auf ihr Verhalten getestet, mathematische Probleme numerisch gelöst oder stochastische Prozesse simuliert werden [FP10]. Einerseits kann durch die Simulation der charakteristische Kursverlauf beibehalten und fortgesetzt werden. Andererseits bleibt der Prozess zufällig. Die Bewegung des künftigen Aktienpreises ist bei jedem Simulationsvorgang eine andere. Abbildung 5.3 zeigt zusätzlich das Intervall, in dem sich der Kursverlauf zu 95 % auf Basis einer genügend hohen Anzahl an Simulationen weiterentwickelt. Für die Wertpapierrendite bedeutet dies unter Hinzunahme des prognostizierten Zeitraumes somit ebenfalls stark schwankende Ergebnisse.

Drei mögliche Realisierungen eines GARCH-Prozesses zeigt die nachfolgende Abbildung 5.4. Alle drei Pfade entsprechen in ihren Eigenschaften, inklusive der variierenden Volatilität, dem gegebenen Kursverlauf. Doch die Rendite ist bei jedem dieser Pfade eine andere. Eine Mittelung der einzelnen Pfade würde bei einer hohen Anzahl wieder zum geschätzten Trend führen (siehe Abbildung 5.3). Ein simulierter stochastischer Prozess nach den Modellen ARMA und GARCH kann aus dieser Sicht nicht zu einer besseren Renditeschätzung herangezogen werden und damit nicht Bestandteil einer im Weiteren alternativen Portfoliostrukturierung sein.

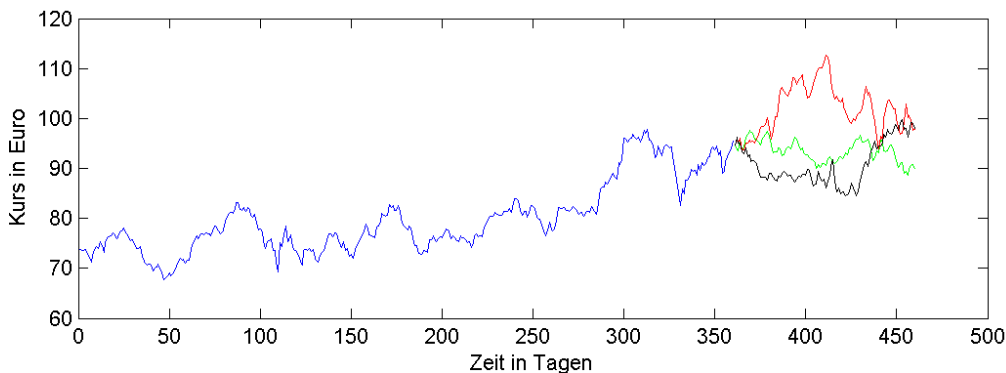


Abbildung 5.4: Drei Pfade eines GARCH-Prozesses

5.2.2 Signalglättung

Wenn sich die Vorhersage finanzieller Zeitreihen auch als schwierig gestaltet, so kann eine Umsetzung veränderter Eingabeinformation zur Portfoliostrukturierung auch an den gegebenen Kursdaten geschehen. In Kapitel 5.1 wurde an einem Beispiel der Einfluss der fortwährenden Schwankungen am Aktienmarkt dargestellt. Je nachdem ob der erste Kurswert, welcher zur Renditeberechnung herangezogen wird, eher ein Hoch oder Tief im Verlauf des Charts ist, so ergibt sich ein anderes Berechnungsergebnis. Demnach erhöhen diese Schwankungen die Unsicherheit der zu erwartenden Rendite. Einerseits definierte Markowitz damit den Begriff des Risikos und relativierte den Wert der Rendite eines Wertpapiers. Andererseits bleibt der Timing-Aspekt, den „richtigen“ Zeitpunkt für Kaufentscheidungen und Datenbestimmung zu finden, der die Rendite letztlich mitbeeinflusst, dennoch unbeachtet. Das ist ein Grund, warum die Portfoliotheorie eher für langfristige Strategien verwendet wird. Doch auch über einen längeren Zeitraum können entsprechend höhere Schwankungen auftreten, wenn man nur einmal die Blasen zur Jahrtausendwende oder Finanzkrise von 2008 beachtet. Die erwartete Rendite würde demnach verfälscht.

Den optimalen Zeitpunkt für einen Kauf oder Verkauf zu treffen, ist kein einfaches Unterfangen. Dabei ein zufriedenstellendes Ergebnis zu erzielen, fällt eher in den Be-

reich der Chartanalyse und weniger in den der Portfoliotheorie. Es scheint als ob die Portfoliotheorie weder eine Aussage über die Bestimmung des optimalen Zeitpunkts treffen kann noch will. Eine weitere Untersuchung in Richtung Timing-Strategie scheint daher nicht zielführend. Berücksichtigt man dabei noch, dass eine Vielzahl von Aktienverläufen ausgewertet werden müssen, so wird das Fällen einer individuellen Entscheidung über einen Zeitpunkt umso illusorischer. Werden dagegen die umliegenden Kursdaten zu dem Wert an einem bestimmten Zeitpunkt hinzugezogen, vermindern sich dadurch die Amplituden der Kursausschläge. Der Signalverlauf würde damit geglättet werden.

Mit der Wavelet-Transformation und deren Aufteilung eines Signals in verschiedene Skalen kann eine solche Glättung durchgeführt werden, indem beispielsweise hochfrequente Anteile eliminiert werden. Mit der Abschwächung von Spitzen im Signalverlauf würde sich eine realistischere Aussage über die erwartete Rendite eines Wertpapiers und eine alternative Portfoliostrukturierung ergeben. Darüber hinaus bestehen noch weitere Optionen für die Umsetzung von Kursanpassungen. Zum einen können neben den hochfrequenten auch niedrigfrequente Anteile entfernt werden. Zum anderen ließe sich auch eine Kombination aus beiden realisieren. Möglicherweise führen dünn besetzte Signale, die nur die markantesten Koeffizienten beinhalten, zu den besten Ergebnissen. Schließlich sind diese auch am stärksten in den jeweiligen Kursverläufen vertreten.

5.3 Voranpassung der Kursdaten

Aufgrund der Ausschüttung von Gewinnen der Unternehmen in Form von Dividenden und der Zusammenlegung und Splittung von Aktien, müssen die Preise an der Börse für Unternehmensanteile für eine repräsentative Berechnung korrigiert werden. Die Einnahmen, die Unternehmen in einer Periode erwirtschaften, können nicht einfach an deren Aktionäre ausgeschüttet werden. Unternehmen müssen ihre Ausgaben decken, Schulden tilgen und Gelder für die Instandhaltung bestehender Sachanlagen aufbringen. Der Betrag der einem Unternehmen nach Abzug dieser und anderer Posten noch

zur Verfügung steht, wird als freier Cashflow bezeichnet. Dieser freie Cashflow kann entweder thesauriert oder ausgezahlt werden. Thesaurieren heißt, dass er einbehalten wird und damit in neue Projekte des Unternehmens fließt oder die eigenen Barreserven erhöht. Der Wert eines Unternehmens beziehungsweise der Preis von dessen gehandelten Anteilen wird damit nicht unmittelbar beeinflusst, da der Betrag weiterhin zum Unternehmen gehört [BD11].

Die Auszahlung des freien Cashflows kann zum einen durch die Dividendenausschüttung geschehen. Zum anderen können mit diesen Mitteln auch ausgegebene Aktien zurückgekauft werden. Beide Varianten haben einen direkten Einfluss auf den Unternehmenswert im Verhältnis zum Wert seiner Anteile. Bei einer Dividendenausschüttung fließen Gelder an die Aktionäre ab, die anschließend nicht mehr zum Bestand des Unternehmens gehören. Der Wert des Unternehmens wird dadurch gemindert und damit auch der Wert, den eine einzelne Aktie hat. Dementsprechend muss auch der Aktienkurs fallen.

Ein Aktienrückkauf verursacht genau das Gegenteil. Indem ein Unternehmen selbst eigene Anteile kauft, verringert sich die Anzahl der ausgegebenen Aktien auf den der Unternehmenswert aufgeteilt werden muss. Ein Aktieninhaber hat damit einen höheren Anspruch am Unternehmen. Der Kurs für eine solche Aktie müsste demzufolge steigen. Benötigt ein Unternehmen zu den freien Cashflows noch weitere Mittel, so kann es ohne Aufnahme zusätzlichen Fremdkapitals einen Aktiensplit durchführen. Dabei werden weitere Anteile ausgegeben, die wiederum den Wert einer einzelnen Aktie verringern [Yah13]. Für die Untersuchungen dieser Arbeit werden daher angepasste Kursdaten verwendet, die die Dividendenausschüttung sowie Aktiensplits und -rückkäufe miteinbeziehen.

5.4 Modellbildung

Unter Beachtung der vorhergehenden Erkenntnisse wird ein Modell geschaffen, das die einzelnen Wertpapierrenditen aus geglätteten Kursdaten errechnet und danach die Ge-

wichte im einem Portfolio bestimmt. Für die Umsetzung der Signalbearbeitung bieten sich verschiedene Möglichkeiten an. Zum einen kann mit dem Grad der Dekomposition ein Signal entsprechend stark aufgesplittet werden. Dadurch können die hochfrequenten Anteile des Signals extrahiert und nach belieben wieder ergänzt werden. Die nachfolgende Abbildung 5.5 zeigt dazu einen originalen Aktienchart mit zwei verschiedenen Stufen der Zerlegung inklusive der Elimination von Details. Zum anderen eignet sich nicht jedes Wavelet für diese Dekomposition. Schließlich soll ein möglichst kontinuierlicher Verlauf entstehen, der keinerlei Sprünge oder ähnlich starke Signalspitzen enthält. Es gilt daher das ständige auf und ab zu reduzieren.

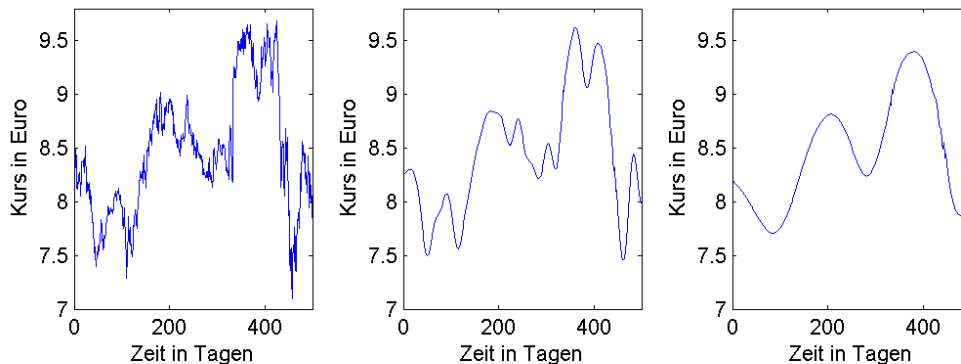


Abbildung 5.5: Elimination von Detailanteilen bei unterschiedlichen Dekompositionsstufen

Insgesamt stehen 36 Wavelets, angefangen beim Haar-Wavelet über die Daubechies-Wavelets bis hin zu den Symlets, zur Verfügung. Aufgrund seiner Beschaffenheit (siehe Abbildung 3.1) kann das Haar-Wavelet nicht zu einem möglichst glatten Signal führen. Es würde bei einer immer kleiner werdenden Anzahl an Approximationskoeffizienten entsprechend größere Rechtefunktionen hervorrufen. Unstetigkeiten gilt es jedoch zu vermeiden. Von einem Tag auf den anderen kann sich dadurch die erwartete Rendite eines Wertpapiers, wie es in Abbildung 5.2 zu sehen ist, ändern. Genauso würden im Falle der biorthogonalen Wavelets `bior1.1`, `bior1.3` und `bior1.5` Stufen im Signalverlauf entstehen, da dessen Rekonstruktions-Wavelet ebenfalls auf Rechtefunktionen

beruht.

Die Daubechies Wavelets db2 und db3 oder das Coiflets coif1 sind im Gegensatz zu dem von Haar stetig. Allerdings sind diese in ihrem Verlauf nicht besonders glatt. Die Aufgabe erfordert ein möglichst „weiches“ Wavelet, wodurch bei der Synthese ein äquivalentes Signal hervorgehen würde. Dies ist beispielsweise bei den Coiflets, Daubechies und Symlets sowie biorthogonalen Wavelets höherer Ordnung der Fall.

Die für das Modell in Betracht gezogenen Wavelets zeigt die nachfolgende Abbildung 5.1. Mit 7 Daubechies, 8 biorthogonalen Wavelets, 4 Coiflets und 5 Symlets stehen der Analyse und Rekonstruktion 24 Wavelets zur Verfügung, die für die Realisierung von möglichst kontinuierlichen Verläufen geeignet erscheinen.

Daubechies	Biorthogonal	Coiflets	Symlets
db4	bior3.1	coif2	sym4
db5	bior3.3	coif3	sym5
db6	bior3.5	coif4	sym6
db7	bior3.7	coif5	sym7
db8	bior3.9		sym8
db9	bior4.4		
db10	bior5.5		
	bior6.8		

Tabelle 5.1: 24 Wavelets aus vier verschiedenen Wavelet-Familien, die für das Modell herangezogen werden

Ein dritter Faktor, der die Rekonstruktion beeinträchtigt, ist das Thresholding. Während einerseits ganze Approximations- und Detailkoeffizienten entfernt werden, können auch bestimmte Koeffizienten entfernt werden, deren Beitrag zum eigentlichen Signal marginal ist. Ein festgelegter Schwellwert bestimmt hierbei, welche Koeffizienten zur Rekonstruktion herangezogen werden. Je höher der Schwellwert im Verhältnis zur Signalamplitude ist desto weniger Koeffizienten werden für die Synthese verwendet. Dadurch würde ein Signal mit nur dünn besetzten Repräsentationen rekonstruiert

werden, welches nicht nur aus Approximationskoeffizienten besteht. Verwendet wird dabei außerdem das weiche Thresholding, da bei der Variante des harten Thresholding dessen mögliche erzeugte Unstetigkeiten den Kursverlauf erneut stören können.

Insgesamt ergeben sich mit den Dekompositionsstufen, den verschiedenen Wavelets und einem veränderlichen Schwellwert drei Komponenten, die das Signal beeinträchtigen können. Der Prozess der Signalglättung und der entsprechenden Portfoliokonstruktion (inklusive der Gewichtung einzelner Aktien) ist in Abbildung 5.6 vereinfacht dargestellt. Drei Kursverläufe möglicher Wertpapiere werden mit Hilfe der Wavelet-Transformation und einem bestimmten Parametersatz geglättet. Danach erfolgt die Berechnung der erwarteten Rendite $\hat{\mu}$ aus diesen Signalen und daran anschließend die Gewichtung der Wertpapiere im Portfolio.

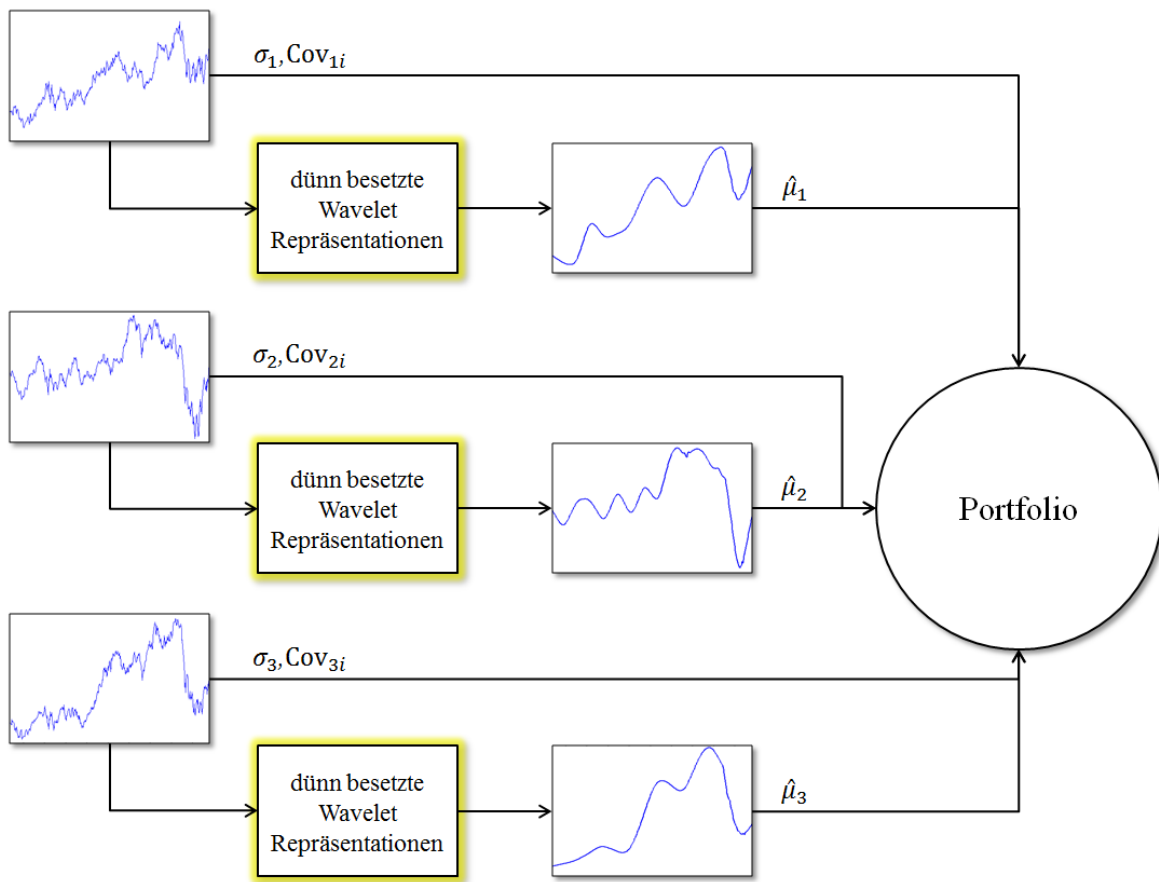


Abbildung 5.6: Prozess der Kursbearbeitung und Portfoliobildung

Kapitel 6

Simulation und Validierung

Um das im vorhergehenden Kapitel beschriebene Modell auf einen Sachverhalt anzuwenden und zu testen, wird nachfolgend eine Simulation durchgeführt. Für diese wird ein Testszenario entworfen, in dem die Portfoliostrukturierung mit verschiedenen Eingabewerten erfolgen kann, die sich aus der Wavelet-Transformation und ihren Parametersätzen ergeben. Zusätzlich zu einem Simulationsvorgang ohne Datenanpassung wird mit dem gleitenden Durchschnitt eine weitere Methode für die Bearbeitung der Kursverläufe herangezogen, um im Nachhinein eine bessere Bewertung anstellen zu können. Der gleitende Durchschnitt kommt in ähnlicher Form auch in den ARMA-Modellen zum Einsatz. Er ist eine Folge von arithmetischen Mittelwerten, die jeweils

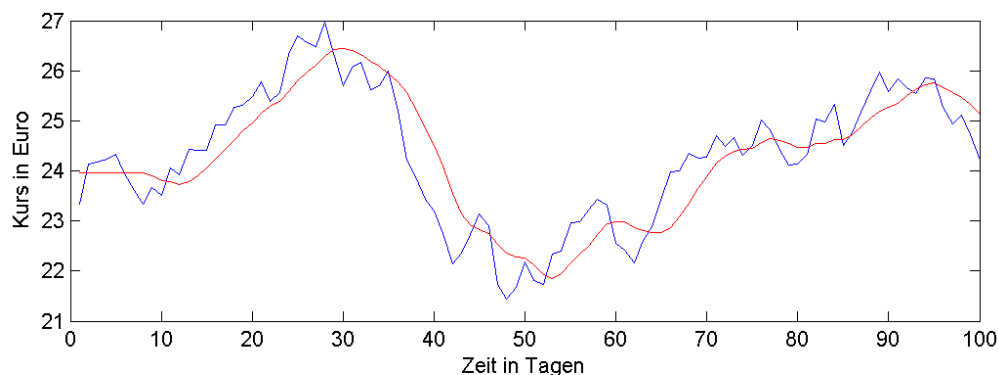


Abbildung 6.1: Gleitender Durchschnitt (rot) eines beliebigen Kursverlaufs (blau)

aus einer Reihe von aufeinanderfolgenden Datenpunkten berechnet wird. Abbildung 6.1 zeigt ihn am Beispiel eines beliebigen Aktiencharts. Der Mittelwert wird hier aus den unmittelbar vorangehenden Datenpunkten ermittelt. Damit wird eine zeitliche Verzögerung verursacht, wie sie durch die rote Linie in der Grafik zu sehen ist.

Nach Abschluss des Testszenarios wird eine Portfoliobildung sowohl mit unveränderten Daten, mit wavelet-optimierten Daten, als auch mit Daten eines gleitenden Mittelwerts durchgeführt. Anschließend werden die Ergebnisse der Simulation analysiert und ausgewertet.

6.1 Testszenario

Eine Portfoliostrukturierung wird am deutschen Aktienmarkt durchgeführt. In Betracht gezogen werden die 30 größten und umsatzstärksten deutschen Unternehmen, die an der Frankfurter Wertpapierbörse gelistet sind (siehe Tabelle A.1). Gegeben sind die Tagesschlusskurse aller Unternehmensanteile im Zeitraum von Dezember 2009 bis November 2013. Für den Kauf der Aktien wird ein anfängliches Startkapital von 100000 € bereit gestellt, welches vollständig auf diese verteilt wird. Um das CAPM bestimmen zu können, wird ein risikofreier Zinssatz benötigt. Dieser wird anhand der Rendite von Staatsanleihen festgemacht. Dazu werden die Wertpapiere des Bundes herangezogen. Bundesschatzbriefe mit einer Laufzeit von 10 bis 30 Jahren hatten im Zeitraum von Dezember 2009 bis November 2013 Renditen von ca. 1 bis 3 % p. a. [Bun13]. Da die Verschiebung auf der Effizienzlinie, die sich aus diesem Zinssatz ergibt, die Portfoliogewichtung nur geringfügig verändert, wird ein konstanter risikofreier Zinssatz von jährlich 2 % für die Simulation verwendet.

Die Intervalle, in denen eine Umschichtung des Portfolios erfolgt, wird auf eine Woche oder einen Monat festgesetzt. Für die Simulation bedeutet das, dass nach jeder Woche oder jedem Monat erneut die Kursdaten bearbeitet werden müssen. Demzufolge werden die Gewichte für die einzelnen Wertpapiere wiederholt bestimmt. Aufgrund der unterschiedlichen Anzahl an Handelstagen in einem Monat und den fehlenden Kursen

am Wochenende, wird die Dauer eines Monats mit 20 Handelstagen definiert, was einem Intervall von 4 Wochen entspricht. Der jährliche risikofreie Zinssatz muss gemäß der verschiedenen Intervalle umgerechnet werden.

Im Übrigen wurde die Überlegung angestellt, Transaktionskosten in das Modell für den Kauf und Verkauf von Wertpapieren einfließen zu lassen. Die Idee wurde indes verworfen, weil sich Transaktionskosten sowohl auf das Portfolio mit unveränderten Kursdaten, als auch auf das Portfolio mit wavelet-optimierten Daten ausgewirkt hätten.

6.1.1 Ablauf

Die Simulation beginnt mit der Auswertung der ersten 100 Handelstage aller Aktien. Aus ihnen werden die erwarteten Renditen, die Risiken und die Korrelationen jedes einzelnen Wertpapiers berechnet. Mit diesen erfolgt wiederum eine Gewichtung der Anteile im Portfolio und die Allokation des verfügbaren Kapitals. Nach einem Intervall werden die Renditen, Risiken und Korrelationen für die nächsten 100 Tage berechnet. Falls sich die Gewichte geändert haben sollten, wird anschließend eine Umschichtung des Portfolios vorgenommen, indem zu den gegebenen Marktpreisen Anteile gekauft oder verkauft werden.

In Abbildung 6.2 sind alle 30 Unternehmen, die im DAX geführt werden, beispielhaft für einen Betrachtungshorizont von 100 Handelstagen mit ihrem monatlichen Erwartungswert der Rendite und der Standardabweichung eingetragen. Die Menge der daraus resultierenden Portfolios wird hier im Bild mit der Effizienzlinie dargestellt. Das optimalste dieser Portfolios ist mit einem grünen Punkt markiert. Es ergibt sich aus der Effizienzlinie und dem risikofreien Zinssatz (der hier mit 0,15 % monatlich angegeben ist), die zusammen die dargestellte Tangente bilden.

Am Ende der Simulation werden die Werte von dem Portfolio mit unveränderten Daten, dem Portfolio mit gleitenden Kursverläufen und dem Portfolio mit wavelet-optimierten Kursinformationen ausgewertet. Dazu wird der akkumulierte Gewinn ermittelt. Das bedeutet, dass die erzielten Gewinne einer Periode nach dieser wieder

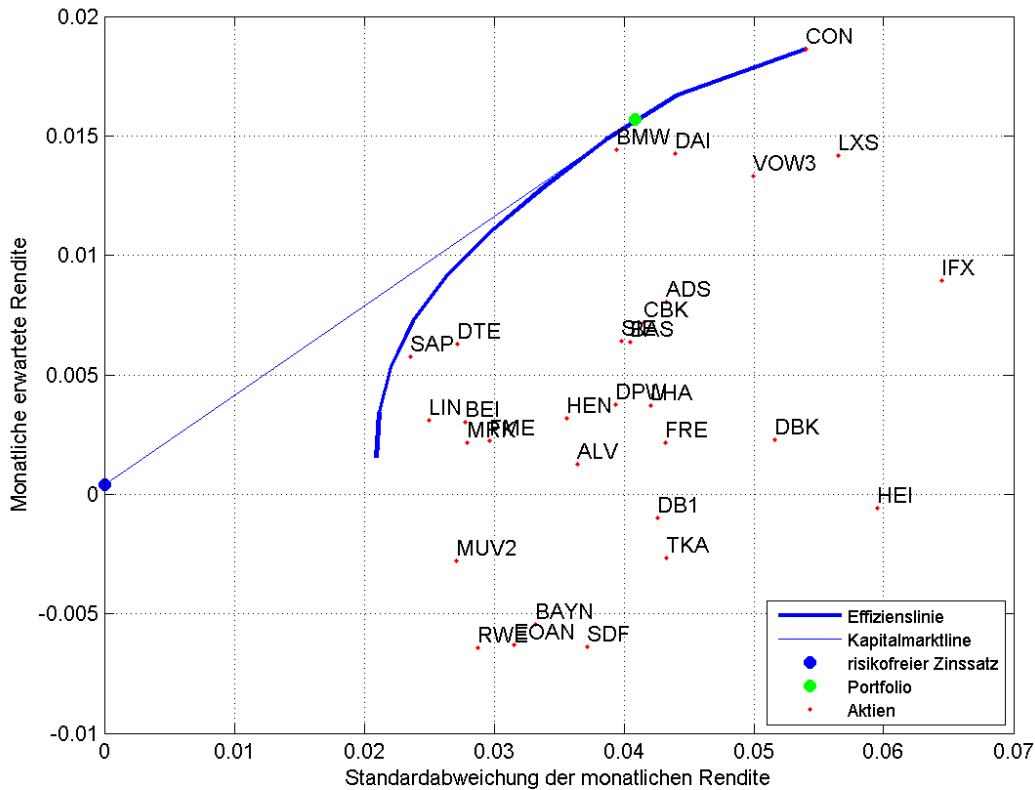


Abbildung 6.2: Bestimmen des optimalen Portfolios auf der Effizienzlinie

investiert werden. Dadurch entsteht ein ähnlicher Effekt wie beim Zinseszins, der hier nicht jährlich sondern wöchentlich oder monatlich ist. Bei einem kumulierten Gewinn besteht jedoch die Gefahr, dass ein Portfolio in bestimmten Phasen des Marktes mehr oder weniger von bereits erzielten Zuwächsen der vorherigen Perioden profitieren konnte als ein anderes. Aus diesem Grund werden zusätzlich die Gewinne jedes einzelnen Intervalls bestimmt und daraus die mittlere Rendite berechnet. Während die eine Variante mehr dem Verhalten der Anleger entspricht, liefert die andere eine bessere Aussage über die Fähigkeiten der drei Methoden.

6.1.2 Parameterschätzung

Mit den drei möglichen Parametern des ausgewählten Wavelets, der Dekompositionsstufen und des Schwellwertes ergeben sich eine Vielzahl von Kombinationen. Um den optimalen Parametersatz zu bestimmen, muss daher zuerst eine Schätzung dieser vorgenommen werden. Die gegebenen Datensätze von Dezember 2009 bis November 2013 werden nach Abzug der ersten 100 Tage, die für die erste Berechnung benötigt werden, in zwei Bereiche mit einer jeweiligen Dauer von knapp 2 Jahren eingeteilt. Der erste Zeitraum dient der Kalibrierung der Parameter. Das heißt, es wird das Wavelet, das Level der Dekomposition und der Schwellwert ermittelt, die die Kursdaten für die Berechnung der erwarteten Rendite so verändern, dass die Rendite in diesem Zeitraum maximiert wird.

In einem zweiten Zeitraum wird mit diesen optimalen Parametern die Portfoliostrukturierung vorgenommen. Für die Portfoliogewichtung mit Hilfe des gleitenden Durchschnitts ergibt sich ein ähnliches Vorgehen. Hier muss allerdings nur der optimale Parameter der Fenstergröße bestimmt werden, der die Menge an Datenpunkten angibt, über die gemittelt wird. Die Schätzung erfolgt wieder in der ersten Phase. In der zweiten werden die Ergebnisse bestimmt. Für das Portfolio ohne Veränderung der Kursinformation wird nur der zweite Zeitraum verwendet, weil bei diesem die Parameterschätzung entfällt.

6.2 Ergebnisse

In Phase eins wurden die optimalen Parameter für die Wavelet-Transformation bestimmt. Der Algorithmus wurde demnach auf diese Art der Zeitreihen kalibriert. Anschließend wurden in der zweiten Phase mit den ermittelten Parametern die Umschichtung des Portfolios vorgenommen und eine Rendite berechnet.

6.2.1 Kalibrierung

Die beste Kombination für ein wöchentliches Intervall nach der Konfigurationsphase wurde mit einem db4-Wavelet bei 5 Dekompositionen erzielt. Der Schwellwert betrug dabei 100 %. Das bedeutet, dass sämtliche Detailkoeffizienten der 5 Stufen entfernt wurden. Den betrachteten Signalen aus jeweils 100 Tagen wurde damit ihre hohe Volatilität genommen. Gleichzeitig entsteht bei dieser Kombination ein „weicher“ Signalverlauf wie es in den Anforderungen an das Modell beschrieben ist. Das Daubechies Nummer 5 zeigt Abbildung 6.3.

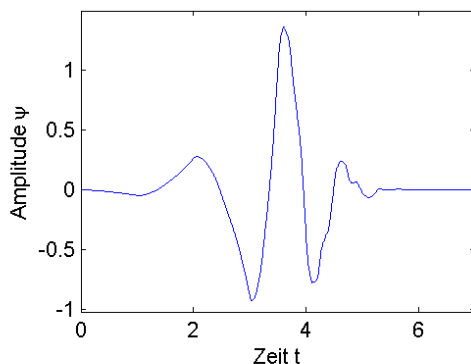


Abbildung 6.3: db4-Wavelet

Platzierung	Wavelet	Dekompositionen	Schwellwert	Gewinn
1	db4	5	100 %	100344,49 €
2	bior3.1	5	100 %	100307,61 €
3	sym6	4	100 %	100279,36 €
4	coif3	5	100 %	100258,85 €
5	db6	4	100 %	100202,28 €

Tabelle 6.1: Auswahl der besten Parametersätze nach der Kalibrierungsphase bei einem wöchentlichen Intervall

Die obere Tabelle zeigt die Platzierungen der einzelnen Kombinationen und ihre Gewinne inklusive Startkapital bei einem wöchentlichen Intervall nach der Testphase.

Nach dem db4 folgen das bior3.1- und das sym6-Wavelet. Die Kombinationen liegen in Bezug auf ihren mittleren Gewinn alle dicht beieinander. Dieser ist bei allen nicht besonders hoch, was mit der Preisentwicklung der Aktien in der Testphase zusammenhängt. Im besten Fall wurden durchschnittlich 100344,49 € erzielt. Die Anzahl der Dekompositionen liegt bei ungefähr 4 bis 5 Stufen. Die Schwellwerte haben in den besten Kombinationen durchweg einen Wert von 100 %, wodurch sämtliche Detailkoeffizienten aus den Signalen entfernt werden. Diese stehen daher nicht für eine Rekonstruktion zur Verfügung.

Bei einem monatlichen Intervall führte das bior3.5-Wavelet zum besten Ergebnis (siehe Tabelle 6.2). Dabei wurde im optimalen Fall ein Kursabschnitt viermal in Approximationen und Details zerlegt und ein Schwellwert von 40 % der Signalamplitude angewandt. Die Wavelet-Transformation verwendet beim bior3.5 zwei verschiedene Wavelets, eines für die Analyse und eines für die Synthese. Beide sind in der folgenden Abbildung dargestellt.

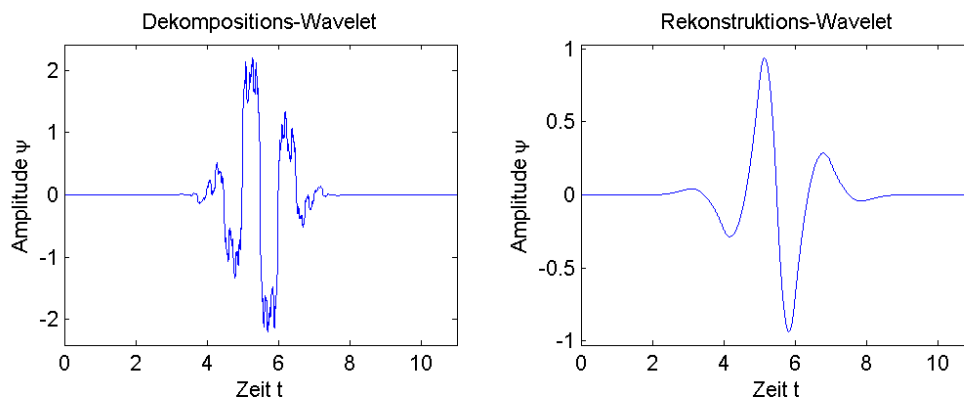


Abbildung 6.4: Dekompositions- und Rekonstruktions-Wavelet des bior3.5-Wavelets

In den besten Fällen wurden bei einem monatlichen Intervall 4 Zerlegungen vorgenommen und ein hoher Schwellwert angewandt. Allerdings liegt dieser nicht mehr wie bei dem wöchentlichen Intervall bei 100 % der Signalamplitude. Genauso nimmt die Anzahl der Dekompositionsstufen etwas ab. Alle Kombinationen erzielten wieder relativ niedrige Renditen in der Testphase, was ebenfalls auf die Entwicklung des Mark-

tes in diesem Zeitraum zurückzuführen ist. Die beste Kombination führte bei einem Startkapital von 100000 € zu einem durchschnittlichen Ergebnis von 104214,89 €.

Platzierung	Wavelet	Dekompositionen	Schwellwert	Gewinn
1	bior3.5	4	40 %	104214,89 €
2	sym4	4	80 %	103591,04 €
3	sym8	4	80 %	103206,06 €
4	bior3.3	3	60 %	103166,22 €
5	coif4	4	40 %	103042,59 €

Tabelle 6.2: Auswahl der besten Parametersätze nach der Kalibrierungsphase bei einem monatlichen Intervall

Als letztes wurde in der Kalibrierungsphase die Fenstergröße für den gleitenden Mittelwert bestimmt. Bei einem wöchentlichen Intervall ergab dieser eine Länge von 19 Datenpunkten als optimale Länge. Bei einem monatlichen Intervall betrug die optimale Fenstergröße eine Länge von 8 Datenpunkten.

6.2.2 Renditen

Von Dezember 2011 bis November 2013 wurde mit einem Portfolio bei unveränderten Kursinformationen ohne Bearbeitung, einem Intervall von einer Woche und einem Startkapital von 100000 € ein kumulierter Gewinn von 118462 € erzielt. Die jährliche Rendite beläuft sich damit auf umgerechnet 9,41 %. Das alternativ strukturierte Portfolio auf Basis veränderter Kursdaten mit Wavelets erreichte im selben Zeitraum 167961 € und eine Rendite von 31,67 % p. a. Angewandt wurde die Kombination aus einem db4-Wavelet, 4 Dekompositionsstufen und einem Schwellwert der Höhe 100 % der maximalen Signalamplitude. Mit dem gleitenden Durchschnitt konnte ebenfalls eine Verbesserung erzielt werden, die allerdings hinter der Methode der Wavelet-Transformation liegt. Ihr kumulierter Gewinn in knapp zwei Jahren beläuft sich auf 141425 € und damit auf 20,19 % Rendite jährlich.

Bei einem monatlichen Intervall entstanden mit einer Ausnahme ähnliche Ergebnisse. Unveränderte Kursinformationen führten im zweiten Zeitraum zu einer Portfoliostrukturierung, die einen Gesamtgewinn von 124829 € mit ungefähr 12,76 % Rendite p. a. erzielte. Deutlich mehr konnte mit dem Verfahren des gleitenden Durchschnitts erreicht werden. Dessen Gewinn belief sich auf 140754 € und 20,34 % jährlicher Rendite. Das wavelet-optimierte Portfolio kann auch hier gegenüber dem normal strukturierten Portfolio zulegen, wobei es hinter das Portfolio mit dem gleitenden Durchschnitt fällt. Es erreicht 126369 € Gewinn, was 13,52 % p. a. bedeutet. Die Verringerung des Schwellwerts bei der Parameterschätzung auf nur noch 40 % der Signalamplitude führte zu einer Signalrekonstruktion, die den originalen Kursverläufen sehr ähnlich waren. Es wurden dabei nur wenig Detailkoeffizienten entfernt. Die Ergebnisse des normal strukturierten und des wavelet-optimierten Portfolios liegen daher dicht beieinander. Alle Ergebnisse zeigt die untere Tabelle 6.3.

	wöchentliches Intervall	monatliches Intervall
normales Portfolio	118462 € (9,41 %)	124829 € (12,76 %)
Portfolio des gleitenden Mittelwerts	141425 € (20,19 %)	140754 € (20,34 %)
wavelet-optimiertes Portfolio	167961 € (31,67 %)	126369 € (13,52 %)

Tabelle 6.3: Kumulierter Gewinn dreier verschiedener Portfolios nach knapp 2 Jahren sowie ihre auf ein Jahr umgerechneten Renditen

Das wavelet-optimierte Portfolio übertrifft das normal strukturierte Portfolio und das Portfolio mit gemittelten Kursinformationen in einem Intervall von einer Woche. Bei einem monatlichen Intervall führte eine zu geringe Glättung nur zu einem minimal besseren kumulierten Gewinn. Das Portfolio des gleitenden Durchschnitts kommt damit auf den höchsten Gewinn. Eine Anpassung der Kursinformationen zur Renditeschätzung ist aber in beiden Fällen von Vorteil. Auffällig ist die enorme Abnahme der Gewinne von einem wöchentlichen zu einem monatlichen Intervall beim wavelet-optimierten Portfolio. Die Auswahl der Parameter in der Testphase war demnach für die Simulationsphase weniger gut. Wie bereits erwähnt, werden mit dem bior3.5 bei 4

Dekompositionsstufen und einem Schwellwert von 40 % die Kursverläufe nur geringfügig angepasst. Außerdem muss man sagen, dass zwar sowohl mit dem db4 als auch mit dem bior3.5 ein glatter Kursverlauf gebildet werden kann, der Prozess der Dekomposition und Synthese sich aber bei beiden unterscheidet. Vergleicht man beispielsweise die Form des bior3.5-Dekompositions-Wavelet mit der des db4-Wavelets, so erkennt man, dass aus der Zerlegung des Signals mit den beiden Wavelets ganz unterschiedliche Koeffizienten entstehen müssen. Dementsprechend ergibt sich nach der Rekonstruktion ein anderer Verlauf. Beim gleitenden Durchschnitt wurden ebenfalls recht unterschiedliche Parameter gewählt. Während bei einem wöchentlichen Intervall eine Fenstergröße von 19 angewandt wurde, kam bei einem monatlichen Intervall eine Fenstergröße von 8 zum Einsatz. Der festgelegte Kalibrierungszeitraum und die Auswahl des Algorithmus bezüglich der Parameter ist daher nicht zu unterschätzen. Deren Wahl kann die realisierten Gewinne und damit die Renditen entscheidend beeinträchtigen.

Die Gewichtung der Wertpapiere im Portfolio, die während der Simulation vom Algorithmus beim wavelet-optimierten Portfolio vorgenommen worden ist, zeigt die nachfolgende Grafik (Abbildung 6.5). Auf der Abszissenachse sind alle Perioden der Simulation aufgetragen. Die Ordinatenachse zeigt alle verfügbaren Unternehmen beziehungsweise deren Wertpapiere. Die Farbskala gibt die Gewichtung einer Aktie an. Je dunkler ein Feld markiert ist, desto höher ist diese im Portfolio. Bei den Unternehmen 5 und 23 wird besonders deutlich, dass der Algorithmus sein verfügbares Kapital zum Teil nur auf wenige Wertpapiere konzentriert. Einerseits verringert sich dadurch der Diversifikationseffekt des Portfolios. Andererseits scheinen diese Aktien in den Vorperioden eine besonders positive Entwicklung gehabt zu haben, wodurch sich eine Konzentration auf diese lohnt.

Als nächstes wird die Rendite, die im Mittel nach jedem Intervall realisiert wurde, betrachtet. Das normal strukturierte Portfolio legt in seinem Wert jede Woche durchschnittlich 190 € zu. Das zweite Portfolio, welches sich auf gemittelte Kursinformationen für die Renditeberechnung bezieht, kommt auf 360 €, also auf 0,36 % mehr pro Woche. 780 € und damit 0,78 % erzielt das wavelet-optimierte Portfolio

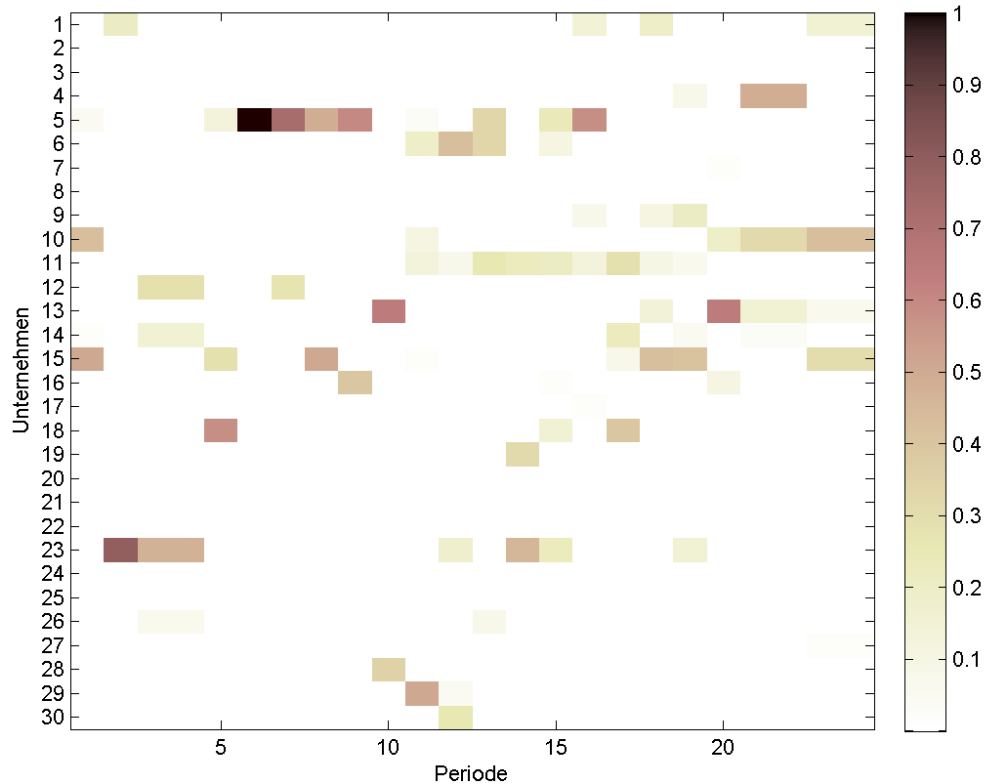


Abbildung 6.5: Gewichtung des wavelet-optimierten Portfolios bei einem monatlichen Intervall

mehr. Bei einer Portfolioumschichtung nach einem Monat steigert das erste Portfolio seinen Wert um durchschnittlich 1,03 %. Der gleitende Durchschnitt übertrifft diesen Wert mit 1,32 %. Nur 0,91 % werden dagegen mit dem wavelet-optimierten Portfolio in einem Monat erreicht (siehe Tabelle 6.4). Betrachtet man jedes einzelne Intervall, ist die Anpassung mit den Parametern des bior3.5, 4 Dekompositionsstufen und dem Schwellwert von 40 % sogar als negativ zu bewerten.

Setzt man die Zahlen der drei Verfahren ins Verhältnis zueinander, so wird das Ergebnis noch einmal deutlicher. Das Portfolio des gleitenden Mittelwerts erzielt bei einem wöchentlichen Intervall eine doppelt so hohe Rendite wie das normal strukturierte. Bei dem wavelet-optimierten Portfolio ist die Rendite sogar viermal so hoch. Bei einem monatlichen Intervall wirken sich die hohen kurzfristigen Schwankungen der

	wöchentliche Rendite	monatliche Rendite
normales Portfolio	0,19 %	1,03 %
Portfolio des gleitenden Mittelwerts	0,36 %	1,32 %
wavelet-optimiertes Portfolio	0,78 %	0,91 %

Tabelle 6.4: Wöchentliche und monatliche Renditen dreier verschiedener Portfolios im Durchschnitt nach knapp 2 Jahren

Kursverläufe auf das normal strukturierte Portfolio weniger negativ aus. Mit dem gleitenden Durchschnitt kann die Rendite allerdings immer noch um ca. 30 % gesteigert werden. Das wavelet-optimierte Portfolio verliert aus den bereits erwähnten Gründen rund 10 % gegenüber dem normal strukturierten.

Die folgende Tabelle zeigt für ein monatliches Intervall alle einzelnen und aufaddierten Gewinne. Anhand der einzelnen Gewinne lässt sich die Entwicklung des Aktienmarktes erahnen. Alle drei Portfolios erzielen in ungefähr den gleichen Perioden einen Gewinn oder einen Verlust. Sie unterscheiden sich vielmehr in der Höhe des Gewinns. Die Ergebnisse für ein wöchentliches Intervall sind im Anhang aufgeführt (siehe Tabelle A.2).

normales Portfolio		gleitender Durchschnitt		wavelet-optimiert	
einzel	aufaddiert	einzel	aufaddiert	einzel	aufaddiert
100000	100000	100000	100000	100000	100000
113062	113062	111716	111716	112484	112484
101722	115008	104709	116977	101072	113690
96367	110830	98529	115256	97384	110716
103425	114627	104329	120246	97027	110310
89898	103047	93147	112005	94063	103761
102558	105683	104926	117523	102558	106415
101520	107290	102542	120510	101692	108216
99417	106664	98808	119073	102263	110665
99435	106062	100131	119229	101839	112700
97237	103131	101586	121120	93745	105650
93921	96861	95417	115570	97482	102990
108833	105417	111302	128631	106414	109596
102665	108226	102665	132058	102890	112763
101757	110128	104242	137660	99759	112491
103654	114152	101629	139903	103792	116756
99377	113440	98574	135697	98712	115252
104135	118131	103905	143035	103860	119701
96411	113892	96445	137950	98827	118297
97564	111117	94912	130931	95622	113118
101528	115632	96623	133291	103521	117101
100926	114947	100540	134010	99041	115978
105417	120062	101976	136658	103774	121520
103970	124829	102997	140754	103991	126369

Tabelle 6.5: Einzelne und aufaddierte monatliche Gewinne aller drei Portfolios in Euro

Der Vollständigkeit halber wurden ebenfalls auch Portfolios mit Kursinformationen, in denen der Detailanteil im Signal belassen und Approximationen ergänzt wurden, untersucht. Dadurch konnte allerdings nur teilweise ein besseres Ergebnis im Verhältnis zum normalen Portfolio erzielt werden. Bei einem wöchentlichen Intervall wurde beispielsweise das sym4 mit lediglich einer Dekompositionsstufe und einem Schwellwert von 40 % ausgewählt. Aus den Signalen wurden daher einige wenige Approximationen entfernt. In der Simulationsphase wurde mit dieser Kombination ein kumulierter Gewinn von 122201,40 € und ein mittlerer Gewinn pro Woche von 0,13 % erzielt. Dieses Portfolio hat einen höheren aufaddierten Gewinn als das normal strukturierte Portfolio. Bei einem Vergleich der Einzelrenditen ist es allerdings deutlich schlechter. Bei einem monatlichen Intervall führte das sym7 mit 4 Dekompositionen und einem Schwellwert von 20 % in der Simulation zu einem aufaddierten Gewinn von 116341,49 € und einer monatlichen Rendite von 1,00 %. Auch diese Kombination kann das normale Portfolio in Bezug zum aufaddierten Gewinn nicht übertreffen. Die monatliche Rendite ist im Vergleich zu dem Portfolio auf Basis entfernter Details erstaunlicherweise höher. Dies liegt allerdings daran, dass beim Entfernen der Approximationen die erwarteten Renditen immer kleiner werden. Kann aus den erwarteten Renditen kein optimales Portfolio auf der Effizienzlinie ermittelt werden, wird nicht gehandelt. Das Portfolio behält damit seine bisherigen Anteile.

Des Weiteren zeigte sich eine Anpassung bei besonders volatilen Kursverläufen als positiv für die Renditeschätzung. Ein bestimmtes Wavelet, welches bei der Simulation besonders gute Ergebnisse hervorbrachte, konnte nicht ausgemacht werden. Allerdings zeigten die Untersuchungen, dass vier bis fünf Dekompositionen für die Analyse der 100-tägigen Kursverläufe optimal sind. Auffällig waren außerdem die hohen Schwellwerte, die nur in Einzelfällen bei einem monatlichen Intervall Detailkoeffizienten zuließen (siehe Tabelle 6.1 und 6.2).

Die dargestellten Ergebnisse der Simulationsphase weisen alle eine relativ hohe Rendite auf. Diese hängt allerdings mit der Entwicklung des Aktienmarktes in dem betrachteten Zeitfenster zusammen. Je nachdem wie gut sich der Markt entwickelt, sind

entsprechend hohe Renditen erzielbar. Der deutsche Aktienindex ist daher für den in dieser Arbeit betrachteten Zeitraum in der nachfolgenden Abbildung 6.6 dargestellt.

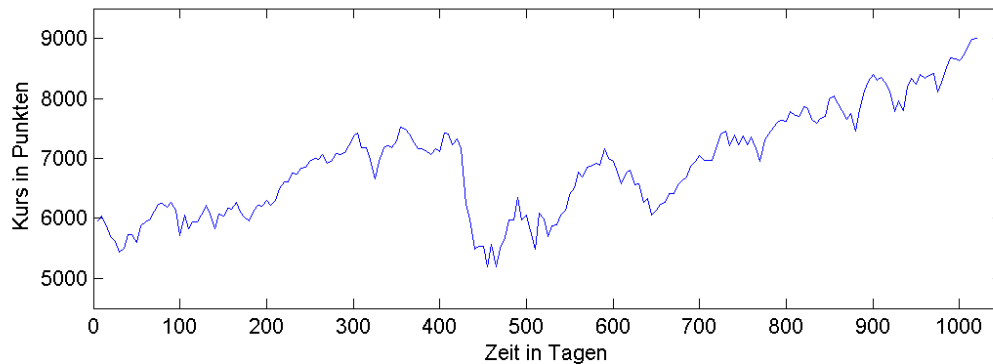


Abbildung 6.6: Kursverlauf des DAX von Dezember 2009 bis November 2013

Die Abbildung zeigt einen deutlichen Anstieg von Dezember 2009 bis November 2013. Zu beachten ist, dass nicht der gesamte Zeitraum für die Simulation verwendet werden konnte. Zum einen kann die Berechnung der Portfoliogewichte erst nach 100 Tagen beginnen. Zum anderen wird die erste Hälfte des verbleibenden Zeitraums für die Kalibrierung der Parameter verwendet. Lediglich die zweite Hälfte steht für die Simulation und Berechnung der Renditen zur Verfügung. In dieser stieg der DAX um ca. 20 % jährlich.

Die positive Entwicklung am Aktienmarkt hat zu hohen Portfoliorenditen geführt. In einer Phase der Rezession und steigender Zinssätze wäre eher das Umgekehrte der Fall. Aus diesem Grund ist es wichtig ein Vergleichsmaß zu haben, das durch eine Portfoliogewichtung ohne Veränderung der Kursinformationen gegeben ist. Im Verhältnis zu dieser konnte eine Optimierung des Portfolios mit Hilfe dünn besetzter Wavelet-Repräsentationen erzielt werden. Die einzelnen Renditen wurden besonders deutlich bei dem wöchentlichen Intervall gesteigert, sowie in deren Folge der Portfoliowert.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Die Wavelet-Transformation wurde an finanziellen Zeitreihen angewendet, um bestimmte Signalcharakteristiken aus diesen zu eliminieren und um anschließend eine Gewichtung eines Portfolios vorzunehmen. Dazu wurden die Kursverläufe zahlreicher Aktien analysiert und mit der Wavelet-Transformation bearbeitet. Anschließend wurde mit ihnen eine Portfoliostrukturierung anhand der Größen erwartete Rendite, Risiko und Korrelation durchgeführt, wobei nur für die Renditebestimmung alternative Kursinformationen verwendet wurden. Das Ziel war die Maximierung des Portfoliowerts, der sich durch eine unterschiedliche Allokation von Kapital auf mehrere Wertpapiere ergibt.

Die Wavelet-Transformation erweist sich auch in Verbindung mit finanziellen Zeitreihen als ein hilfreiches Werkzeug. Durch ihren Einsatz wurde eine alternative Renditeberechnung einzelner Wertpapiere durchgeführt und im Anschluss eine Portfoliogewichtung durchgeführt, die zu einer höheren Portfoliorendite führte. Das Angleichen täglicher Kurse zueinander kann in jedem Fall positiv in Bezug zur Portfoliogewichtung gesehen werden. Mit dem gleitenden Mittelwert wurde eine zweite Methode dargestellt, die den Portfoliowert ebenfalls erhöhen konnte. Bei einem wöchentlichen Intervall unterlag sie dem wavelet-optimierten Portfolio noch deutlich. Bei einem monatlichen Intervall führte sie allerdings aufgrund einer ungünstigen Parameterschätzung des wavelet-optimierten Portfolios zu einem besseren Ergebnis.

Eine Aussage über ein optimales Wavelet für die Berechnung der Koeffizienten kann

nicht eindeutig getroffen werden, da die Ergebnisse recht dicht beieinander lagen. Bei der Wahl der Dekompositionsstufen führte eher eine höhere Anzahl zu einem besseren Ergebnis. Bei einer Signallänge von 100 Datenpunkten waren ca. vier Zerlegungen optimal. Genauso waren meist höhere Schwellwerte von Vorteil, die die Details aus den Kursverläufen herausnahmen.

Bei der Parameterbetrachtung der Wavelet-Transformation darf nicht vergessen werden, dass sich diese über einen deutlichen Umweg auf die Rendite des Portfolios auswirken. Schon in der Variante unveränderter Kursverläufe wird der Mittelwert aus den einzelnen Renditen, die sich in einem Intervall ergeben, gebildet. „Unglücklich“ bestimmte Renditewerte werden in ihrer Wirkung bereits dadurch abgeschwächt. Außerdem sind die Risiken und Korrelationen zwei ebenfalls wesentliche Komponenten bei der Gewichtung eines Portfolios, auf die kein Einfluss genommen wurde. Erst die Gewichte und damit die Wertpapiere im Portfolio führen letztlich zu einer Rendite des Portfolios, welches mit anderen, denen dieselben Aktien zur Verfügung stehen, verglichen wird. Es ist jedoch festzuhalten, dass eine Reduzierung der Volatilität einen positiven Einfluss auf die Renditeberechnung und damit den Portfoliowert hat.

Die Analyse von Portfolios mittels dünn besetzter Wavelet-Repräsentationen hat sich wie eben beschrieben als eine erfolgreiche Methode zur Bewertung und Optimierung dieser erwiesen. Interessant wäre für die weiteren Untersuchungen eine Betrachtung größerer Zeiträume. Leider waren für die gegebenen Aktien keine früheren Datensätze verfügbar, sodass sich die Simulation auf einen Zeitbereich von knapp vier Jahren beschränken musste. Interessant wären dann auch verschiedene beziehungsweise längere Trainingszeiträume, damit die Parameter für die Wavelet-Transformation besser bestimmt werden können. Zu überlegen wäre auch, ob man von vornherein einen Schwellwert von 100 % anwendet, um die Kursverläufe zu glätten.

Des Weiteren ließen sich auch die minimale und maximale Anzahl an Wertpapieren im Portfolio festlegen. Beispielsweise könnten zehn verschiedene Aktien als Untergrenze definiert werden. Damit würde man von vornherein einen hohen Diversifikationsgrad im Portfolio haben. Dies wirft gleichzeitig die Frage nach den Bestandteilen auf. Um die

Breite an verschiedenen Wertpapieren halbwegs einzugrenzen, wurden in dieser Arbeit die 30 größten deutschen Unternehmen betrachtet. Folglich könnte man die Auswahl zuerst auf kleinere Unternehmen ausdehnen. Vielversprechend erscheinen hierbei auch Technologieunternehmen wie sie im TecDAX geführt werden. Sie weisen in der Regel höhere Volatilitäten als die Unternehmen des DAX auf. Schließlich wären Investitionen auf internationaler Ebene eine Option. Besonders in wachstumsstarken Regionen sind eher hohe Rendite und Risiken der Fall, womit sich der Analyse mit Wavelets ein hervorragender Ansatzpunkt bietet.

Darüber hinaus ist die Allokation nach der Portfoliotheorie nicht die einzige Möglichkeit, die Investoren für die Anlage ihres Vermögens zur Verfügung steht. Gerade weil die Portfoliotheorie nicht nur Befürworter hat, wären andere Anlagestrategien in Kombination mit Wavelets eine Überlegung wert. Die Wavelet-Transformation präsentiert sich jedenfalls für finanzielle Zeitreihen als vielversprechend, wenn es darum geht den Kursen mit ihren teils hohen Volatilitäten etwas die „Schärfe“ zu nehmen. Diese hat schon so manchen Anleger in die Irre geführt. Denn wie sagte einst schon der berühmte Investor André Kostolany:

„An der Börse sind 2 mal 2 niemals 4, sonder 5 minus 1. Man muss nur die Nerven haben, das minus 1 auszuhalten.“

Anhang

Adidas AG	Fresenius SE & Co KGaA
Allianz SE	HeidelbergCement AG
BASF SE	Henkel AG & Co KGaA
Bayer AG	Infineon Technologies AG
Beiersdorf Aktiengesellschaft	Deutsche Lufthansa AG
Bayerische Motoren Werke AG	Linde AG
Commerzbank AG	Lanxess AG
Continental AG	Merck KGaA
Daimler AG	Münchener Rückversicherungs AG
Deutsche Börse AG	RWE AG
Deutsche Bank AG	SAP AG
Deutsche Post AG	K+S Aktiengesellschaft
Deutsche Telekom AG	Siemens AG
E. On SE	ThyssenKrupp AG
Fresenius Medical Care AG & Co. KGaA	Volkswagen AG

Tabelle A.1: Die 30 Unternehmen des deutschen Aktienindexes

normales Portfolio		gleitender Durchschnitt		wavelet-optimiert	
einzel	aufaddiert	einzel	aufaddiert	einzel	aufaddiert
100000	100000	100000	100000	100000	100000
100593	100593	101256	101256	102262	102262
102477	103084	103879	105184	102741	105065
99134	102192	101124	106366	100801	105906
102056	104293	102642	109176	102982	109064
99105	103359	99788	108945	99263	105125
97458	100732	98146	106924	97772	102783
98369	99089	97512	104264	95285	100169
106085	105120	107601	112189	107263	107445
100520	105666	100473	112720	100871	108380
100404	106093	100523	113309	101442	108994
98915	104942	98706	111843	101176	110276
99159	104059	99190	110937	97675	107712
103601	107806	103452	114766	103293	111259
100515	108361	100989	115901	101356	112767
101182	109642	101532	117677	100207	113001
98379	107865	98818	116286	98813	111660
96292	103865	98492	114532	99371	110957
97034	100784	96717	110773	99170	110037
99379	100158	99688	110427	100891	111017
99746	99903	98563	108840	97324	108046
102081	101983	101878	110884	102148	110367
101276	103284	101277	112300	101933	112500
97511	100713	96807	108714	100837	111291
103028	103763	103556	112580	103453	115133
101340	105153	100854	113542	101059	116352
102477	107758	102426	116297	103875	119595
97929	105526	98723	114811	96979	115982
100974	106553	100897	115841	102644	119048
100256	106827	101877	118014	103417	123116
100554	107419	100650	118782	100706	123985
98118	105397	98231	116680	99331	123156

100548	105974	99922	116589	99893	123024
99945	105917	101432	118258	100887	124115
99897	105808	100095	118370	104109	129215
99214	104976	100037	118414	99660	128776
99438	104386	100988	119583	97969	126160
102064	106540	103214	123427	103107	130079
99944	106480	99973	123393	99783	129797
102068	108682	102258	126180	102569	133132
96545	104928	96794	122135	99670	129369
101402	106400	99008	120923	97019	125513
99828	106217	99129	119870	96557	124915
100524	106773	100173	120077	98244	122722
101048	107892	99928	119990	95963	119872
102468	110554	104007	124798	105814	126842
101092	111762	101961	127244	102176	129602
101230	113137	101865	129617	104601	135565
97894	110755	99471	128931	104181	141233
100093	110858	100775	129931	99615	140689
102036	113115	101633	132053	101590	143480
99161	112166	99632	131567	103138	145665
98525	110512	99086	130364	103187	145735
100999	111616	100770	131368	101429	147817
101419	113200	101421	133234	103659	151067
97694	110589	98129	130742	97880	147864
101775	112553	100314	131152	102357	151350
101097	113788	101321	132884	104128	153968
97311	110728	97783	129938	104121	153958
103360	114448	103093	133958	102916	158448
101590	116267	101999	136635	100838	159776
99953	116212	101276	138378	100900	161215
98902	114936	97680	135167	99371	160201
100875	115942	100635	136026	101084	161937
96924	112376	97683	132874	97737	158273
96378	108306	95672	127123	92306	149478
102908	111456	96896	123177	102398	153063

99528	110930	100633	123957	101679	151987
102499	113701	103485	128277	103538	157365
99037	112606	99979	128251	100840	158687
102111	114983	100698	129146	101466	161013
97840	112499	97124	125432	100328	159206
97362	109531	99503	124808	99421	158285
99817	109330	100595	125551	100293	158748
101482	110950	101172	127022	100691	159845
94537	104889	94831	120457	97273	154420
98694	103519	99110	119385	96539	153253
101046	104602	100411	119875	97275	154422
101606	106282	101477	121646	99876	158552
102590	109035	102642	124860	103221	163862
99010	107955	98673	123202	98419	161271
100758	108774	101034	124476	100912	162742
101254	110138	102230	127252	101653	163937
98095	108040	98434	125259	100969	162834
97795	105657	98629	123543	98682	159145
103415	109265	102109	126148	98573	158970
101994	111444	101377	127886	100516	159790
100059	111510	99113	126751	100817	161096
101485	113165	100818	127787	100642	162131
102059	115495	101130	129231	101822	164032
97815	112971	99095	128062	97892	160574
104151	117660	102301	132205	102390	164412
98909	116376	101045	133587	103928	166881
99256	115511	99504	132925	103257	165803
99703	115167	100101	133060	100819	161888
98997	114012	102141	135908	100065	161993
101151	115324	101000	137268	101408	164275
102721	118462	103029	141425	103684	167961

Tabelle A.2: Einzelne und aufaddierte wöchentliche Gewinne aller drei Portfolios in Euro

Abbildungsverzeichnis

2.1	Zwei Wertpapiere A und B sowie die Menge aller daraus zu erstellenden möglichen Portfolios	16
2.2	Effizienzlinie einer Menge an Wertpapieren	18
2.3	Kapitalmarktlinie aus risikofreiem Zinssatz und Effizienzlinie	19
3.1	Haar-Wavelet	26
3.2	Zerlegung eines Signals in zwei harmonische Funktionen	28
3.3	Frequenzspektrum des Signals $x(t)$	29
3.4	Vergleich eines Signals mit skalierten Wavelets	34
3.5	Ein beispielhaftes Signal mit seinem dazugehörigen Skalendiagramm	35
3.6	Aufteilung eines Signals in einen Approximations- und einen Detailanteil	37
3.7	Decomposition-Tree	38
3.8	Dekomposition und Synthese	40
3.9	Hartes und weiches Thresholding	42
3.10	Daubechies Wavelets 2 bis 10	44
4.1	Aktie der deutschen Bank von Dezember 2009 bis November 2013	54
4.2	Weißes Rauschen versus GARCH-Modell	55
5.1	Renditeberechnung aus rein historischen Werten und aus Werten mit einer zusätzlichen Vorhersage	61
5.2	Zwei Pfade der Renditeberechnung	61
5.3	Bestimmen des weiteren Trends	63

5.4	Drei Pfade eines GARCH-Prozesses	64
5.5	Elimination von Detailanteilen bei unterschiedlichen Dekompositionsstufen	67
5.6	Prozess der Kursbearbeitung und Portfoliobildung	69
6.1	Gleitender Durchschnitt (rot) eines beliebigen Kursverlaufs (blau) . . .	71
6.2	Bestimmen des optimalen Portfolios auf der Effizienzlinie	74
6.3	db4-Wavelet	76
6.4	Dekompositions- und Rekonstruktions-Wavelet des bior3.5-Wavelets . .	77
6.5	Gewichtung des wavelet-optimierten Portfolios bei einem monatlichen Intervall	81
6.6	Kursverlauf des DAX von Dezember 2009 bis November 2013	85

Tabellenverzeichnis

5.1	24 Wavelets aus vier verschiedenen Wavelet-Familien, die für das Modell herangezogen werden	68
6.1	Auswahl der besten Parametersätze nach der Kalibrierungsphase bei einem wöchentlichen Intervall	76
6.2	Auswahl der besten Parametersätze nach der Kalibrierungsphase bei einem monatlichen Intervall	78
6.3	Kumulierter Gewinn dreier verschiedener Portfolios nach knapp 2 Jahren sowie ihre auf ein Jahr umgerechneten Renditen	79
6.4	Wöchentliche und monatliche Renditen dreier verschiedener Portfolios im Durchschnitt nach knapp 2 Jahren	82
6.5	Einzelne und aufaddierte monatliche Gewinne aller drei Portfolios in Euro	83
A.1	Die 30 Unternehmen des deutschen Aktienindexes	91
A.2	Einzelne und aufaddierte wöchentliche Gewinne aller drei Portfolios in Euro	94

Literaturverzeichnis

- [Ald13] Irene Aldridge. *High-Frequency Trading - A Practical Guide to Algorithmic Strategies and Trading Systems*. John Wiley & Sons, Hoboken, 2013.
- [Ass00] Walter Assenmacher. *Induktive Statistik*. Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [BD11] Jonathan Berk and Peter DeMarzo. *Grundlagen der Finanzwirtschaft - Analyse, Entscheidung und Umsetzung*. Pearson Deutschland, München, 2011.
- [BEL07] Jöran Bergh, Frederik Ekstedt, and Martin Lindberg. *Wavelets mit Anwendungen in Signal- und Bildverarbeitung*. Springer Verlag, Berlin, 2007.
- [Bän05] Werner Bäni. *Wavelets - Eine Einführung für Ingenieure*. Oldenburg Wissenschaftsverlag, München, 2005.
- [BS73] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3:637–654, 1973.
- [Bun13] Deutsche Bundesbank. Kurse und Renditen börsennotierter Bundeswertpapiere Dezember 2013. http://www.bundesbank.de/Redaktion/DE/Downloads/Service/Bundeswertpapiere/Rendite/kurse_renditen_bundeswertpapiere_2013_12.pdf?__blob=publicationFile; (aufgerufen am 07. Dezember 2013).

- [CCR08] T. Conlon, M. Crane, and H. Ruskin. Wavelet multiscale analysis for hedge funds: Scaling and strategies. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 387, No. 21:5197–5204, 2008.
- [CDF92] A. Cohen, I. Daubechies, and J. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 45, No. 5:485–560, 1992.
- [DRR12] Pedro Diez, Irma Russo, and Jose Russo. *The Evolution of the Use of Mathematics in Cancer Research*. Springer Science+Business Media, New York, 2012.
- [Fas08] M. Fasanghari. Stock portfolio recommendation using fuzzy method. *4th International Conference on Networked Computing and Advanced Information Management*, pages 685–689, 2008.
- [FHH01] Jürgen Franke, Wolfgang Härdle, and Christian Hafner. *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [FP10] Hermann Friedrich and Frank Pietschmann. *Numerische Methoden - ein Lehr- und Übungsbuch*. Walter de Gruyter, Berlin, 2010.
- [Fre03] Craig French. The treynor capital asset pricing model. *The Journal of Investment Management*, Vol. 1, No. 2:60–72, 2003.
- [Gan11] Girish Ganesan. A subspace approach to portfolio analysis. *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 28, No. 5:49–60, 2011.
- [GK97] Peter Gerdson and Peter Kröger. *Digitale Signalverarbeitung in der Nachrichtenübertragung*. Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [GSW01] Ramazan Gencay, Faruk Selcuk, and Brandon Whitcher. *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*. Academic Press, Waltham, 2001.

- [GSW05] Ramazan Gencay, Faruk Selcuk, and Brandon Whitcher. Multiscale systematic risk. *Journal of International Money and Finance*, Vol. 24, No. 1:55–70, 2005.
- [Hub97] Barbara Burke Hubbard. *Wavelets - Die Mathematik der kleinen Wellen*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [KPU01] Pavlo Krokhmal, Jonas Palmquist, and Stanislav Uryasev. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *University of Florida*, 2001.
- [Leu11] Yungho Leu. An effective stock portfolio trading strategy using genetic algorithms and weighted fuzzy time series. *15th North-East Asia Symposium on Nano, Information Technology and Reliability (NASNIT)*, pages 70–75, 2011.
- [LFB06] Miguel Sousa Lobo, Maryam Fazel, and Stephen Boyd. Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs. *Springer Science + Business Media*, 2006.
- [LMR98] Alfred Louis, Peter Maaß, and Andreas Rieder. *Wavelets*. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [MAAT10] Abul Masih, Mohammed Alzahrani, and Omar Al-Titi. Systematic risk and time scales: New evidence from an application of wavelet approach to the emerging gulf stock markets. *International Review of Financial Analysis*, Vol. 19, No. 1:10–18, 2010.
- [Mar52] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1:77–91, 1952.
- [Mer10] Alfred Mertins. *Signaltheorie - Grundlagen Der Signalbeschreibung, Filterbänke, Wavelets, Zeit-Frequenz-Analyse, Parameter- und Signalschätzung*. Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage, Wiesbaden, 2010.

- [MMOP06] Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim, and Jean-Michel Poggi. *Wavelet Toolbox - For Use with MATLAB*. The MathWorks, Inc., 2006.
- [MOG09] Josep Masdemont and Luis Ortiz-Gracia. Haar wavelets-based approach for quantifying credit portfolio losses. *Universitat Politècnica de Catalunya, Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona*, 2009.
- [Neu04] Mark Neukomm. *Value at Risk-Quantifizierung unter Verwendung von Hochfrequenzdaten - Empirische Analyse am Beispiel des Aktienkursrisikos*. Deutscher Universitäts-Verlag/GWV Fachverlage, Wiesbaden, 2004.
- [Nis05] Steve Nison. *Technische Analyse mit Candlesticks - alle wichtigen Formationen und ihr Praxiseinsatz*. FinanzBuch Verlag, München, 2005.
- [RB11] K. Rabeh and Mohamed B. A time-scale analysis of systematic risk: wavelet-based approach. *MPRA Paper*, 2011.
- [Ros76] Stephen Ross. The arbitrage theory of capital asset pricing. *The Journal of Economic Theory*, Vol. 13, No. 3:341–360, 1976.
- [Rub02] Mark Rubinstein. Markowitz’s portfolio selection: A fifty-year retrospective. *The Journal of Finance*, Vol. 57, No. 3:1041–1045, 2002.
- [RUZ94] J. Ramsey, D. Usikov, and G Zaslavsky. An analysis of u.s. stock price behaviour using wavelets. *New York University*, 1994.
- [SB07] Manfred Steiner and Christoph Bruns. *Wertpapiermanagement - Professionelle Wertpapieranalyse und Portfoliostrukturierung*. Schäffer-Poeschel Verlag für Wirtschaft - Steuern - Recht, Stuttgart, 2007.
- [Sch05] Stephan Schuster. *Das Seedarlehen in den Gerichtsreden des Demosthenes: Mit einem Ausblick auf die weitere historische Entwicklung des Rechtsinstitutes: dáneion nautikón, fenus nauticum und Bodmerei*. Duncker & Humblot, Berlin, 2005.

- [Sha63] William Sharpe. A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, Vol. 9, No. 2:277–293, 1963.
- [Sha64] William Sharpe. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3:425–442, 1964.
- [Sie93] Heinrich Sieveking. *Das Seedarlehen des Altertums*. Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1893.
- [Sti10] Jürgen Stiefl. *Risikomanagement und Existenzsicherung - Mit Konzepten und Fallstudien zu KMU*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2010.
- [TAA11] Mustafa Torun, Ali Akansu, and Marco Avellaneda. Portfolio risk in multiple frequencies. *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 28, No. 5:61–71, 2011.
- [Tro11] Alexander Troschke. *Strategien der Diversifikation vor Markowitz*. Josef Eul Verlag, Köln, 2011.
- [Wan10] G. Wang. Portfolio diversification and risk reduction- evidence from taiwan stock mutual funds. *4th International Conference on Management and Service Science (MASS)*, pages 1–4, 2010.
- [WP97] Terry Watsham and Keith Parramore. *Quantitative Methods in Finance*. Cengage Learning, 1997.
- [Yah13] Yahoo! Inc. About historical prices. http://help.yahoo.com/kb/index?locale=en_US&page=content&y=PROD_FIN&id=SLN2311&actp=lorax;, (aufgerufen am 26. November 2013).
- [ZC01] Bai-Ling Zhang and Richard Coggins. Multiresolution forecasting for futures trading using wavelet decompositions. *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 12, No. 4:765–775, 2001.

- [Zha08] Zhe Zhang. A mean-semivariance model for stock portfolio selection in fuzzy random environment. *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, pages 984–988, 2008.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Alexander Stegmann

Dortmunder Str. 14

90425 Nürnberg

Tel.: +49 176 80145768

Email: alexander.stegmann@gmail.com

Geboren am 15.09.1988 in Berlin-Mitte

Familienstand: ledig

Praktische Erfahrungen

seit 05/2012 Werkstudent bei der Siemens AG (Erlangen) in den Bereichen
Industrial Software und Automation

10/2008–09/2011 Praxiseinsätze innerhalb des Dualen Studiums bei der Siemens AG

Softwareentwicklung im WinCC Competence Center/Alarm
Control Center, Siemens AG Stuttgart

Inbetriebnahme von Automobilanlagen der Daimler AG am
Standort Untertürkheim

Softwareentwicklung im Hardwarecenter Süd, Siemens AG
Stuttgart

05/2004–06/2004 Praktikum bei der Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG
(Dahlewitz) in den Bereichen Einkauf und Controlling

Studium

10/2011–12/2013 Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Studium des Wirtschaftsingenieurwesens

Technische Vertiefung: Informations- und
Kommunikationssysteme,

Wirtschaftliche Vertiefung: Management

Projektarbeit: Extrapolation von Finanzdaten (mit Hilfe der
Frequenzselektiven Extrapolation)

Angestrebter Abschluss: Master of Science (M.Sc.)

10/2008–09/2011 Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart

Studium der Elektrotechnik mit dem Schwerpunkt
Automatisierung

Thema der Bachelor-Thesis: Konzeption und Realisierung einer
Erweiterung zur Alarmkonfiguration für WinCC/PCS7

Studienarbeit II: Entwicklung, Aufbau und Test eines
Spracherkennungsmoduls für Roboter

Studienarbeit I: Entwicklung eines Anemometers ohne bewegliche
Teile

Abschluss: Bachelor of Engineering (B.Eng.)

Schulbildung

08/2001–06/2008 Kopernikus Gymnasium Blankenfelde

Sprachkenntnisse

Deutsch Muttersprache

Englisch Sehr gute Kenntnisse

Französisch Gute Kenntnisse

Chinesisch Grundkenntnisse

Auslandserfahrung

03/2013–04/2013 Sprachreise in die USA (Arizona, Kalifornien, Nevada)

09/2012 Sprachreise in die USA (Florida)

Interessen Fitness, Volleyball, Fußball, Digitale Photographie,
Bildbearbeitung und Gitarre spielen

Erlangen, Dezember 2013